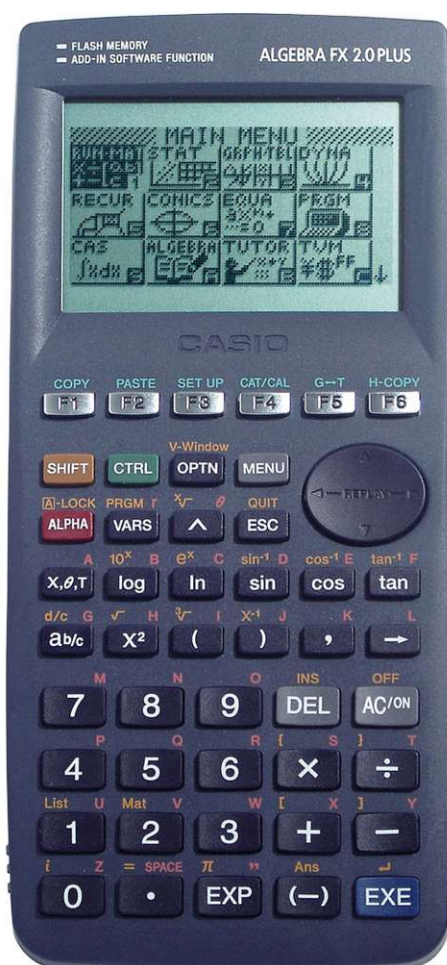


MATICE, DETERMINANTY A JEJICH VYUŽITÍ V PRAXI



Mgr. Eva Valentová – autorka

prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc. – recenzenti

Mgr. Eva Pelikánová

2014

Obsah

1. Vektory	5
Aritmetické vektory	5
2. Maticová algebra I.....	8
Matice a jejich vlastnosti.....	8
Hodnost matice	9
3. Soustavy lineárních rovnic	13
Soustava lineárních rovnic	13
Řešitelnost soustavy	13
Postup řešení soustav – Gaussova a Jordanova metoda.....	14
Aplikační příklady z praxe I (využívající teorii soustav lineárních rovnic)	19
4. Maticová algebra II	23
Operace s maticemi	23
Součin matic $A \cdot B$	23
Vlastnosti násobení matic	25
Aplikační příklady z praxe II (využívající maticovou algebru)	27
Inverzní matice.....	29
Maticové rovnice	32
Řešení soustavy lineárních rovnic užitím inverzní matice	35
Aplikační příklady z praxe III	37
5. Determinanty	43
Vlastnosti determinantů	44
Řešení soustavy lineárních rovnic užitím determinantu	48
Aplikační příklady z praxe IV (využití determinantů).....	50
Literatura	53

Předmluva

Tento učební text je určen pro nadané studenty 1. až 4. ročníku čtyřletých gymnázií, kteří se chtějí více rozvíjet v oblasti matematiky, neboť teorie matic, determinantů a řešení soustav lineárních rovnic pomocí nich nepatří mezi partie středoškolské matematiky.

Autorka si předsevzala nelehký úkol přiblížit matematiku vyučovanou převážně v prvním roce vysokoškolského studia studentům gymnázií, doplnit teorii srozumitelnými příklady z oblasti ekonomie, statistiky, finanční matematiky či demografie, ve kterých lze vyučované matematické modely a postupy využít.

Cílem tohoto textu je ukázat, v kterých oblastech a jakým způsobem lze matematické metody aplikovat, a motivovat studenty ke studiu matematiky.

Publikace obsahuje množství řešených i neřešených příkladů s výsledky k samostatnému studiu.

Autorka děkuje recenzentům, kteří se svými cennými připomínkami zasloužili o zkvalitnění textu.

1. Vektory

Aritmetické vektory

Uspořádanou n -tici reálných čísel nazveme **aritmetický vektor** (nebo jen vektor) a označíme například $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), n \in \mathbb{N}$. Čísla a_1, a_2, \dots, a_n se nazývají **složky vektoru** \vec{a} . Vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule, se nazývá **nulový vektor** – ozn. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Sčítání aritmetických n -složkových vektorů (oba vektory musí mít stejně složek) definujeme tak, že sečteme odpovídající složky těchto vektorů:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Násobení vektoru reálným číslem k – každou složku vynásobíme tímto reálným číslem:

$$k \cdot \vec{a} = k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Násobení dvou aritmetických n -složkových vektorů (oba vektory musí mít stejně složek) definujeme jako **skalární součin těchto vektorů**, tj.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Vektor \vec{b} je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$, existují-li reálná čísla c_1, c_2, \dots, c_r , tak že:

$$\vec{b} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + c_r \cdot \vec{a}_r.$$

Čísla c_1, c_2, \dots, c_r se nazývají **koeficienty lineární kombinace**.

Mějme např. vektory $(-2, 1), (3, 4), (0, -6)$. Vynásobíme-li každý z těchto vektorů nějakým (libovolným) reálným číslem a tyto násobky sečteme, dostaneme lineární kombinaci těchto vektorů:

$$\text{např.: } 4(-2, 1) + (-2)(-2, 1) + \frac{1}{3}(0, -6) = (-8, 4) + (4, -2) + (0, -2) = (-4, 0).$$

Skupinu r vektorů, $r \geq 2$, nazýváme **lineárně závislá**, pokud aspoň jeden vektor ve skupině je lineární kombinací ostatních. Jeden **vektor** nazýváme lineárně závislý, pokud je nulový. **Skupinu vektorů**, která není lineárně závislá, nazýváme **lineárně nezávislá**.

Příklad 1

Obchodník má přebytek zboží a, b . Chce ho co nejdříve vyprodat, proto zboží zlevnil, ale jen ve speciálních sadách. V první sadě je 1 výrobek a a 2 výrobky b , v druhé sadě jsou 3 výrobky a a 1 výrobek b . Jak má nakupující postupovat, aby nakoupil co nejlevněji, chce-li koupit 100 kusů výrobku a a 50 kusů výrobku b ?

Řešení

Určíme, zda vektor $(100, 50)$ je lineární kombinací vektorů $(1, 2)$ a $(3, 1)$, tedy zda existují čísla c_1, c_2 taková, že

$$(100, 50) = c_1 (1, 2) + c_2 (3, 1).$$

Z rovnic pro jednotlivé souřadnice získáme soustavu lineárních rovnic

$$c_1 + 3c_2 = 100$$

$$2c_1 + c_2 = 50,$$

kterou vyřešíme např. vyjádřením c_1 z první a dosazením do druhé rovnice. Soustava má právě jedno řešení $c_1 = 10, c_2 = 30$

Zjistili jsme, že vektor $(100, 50)$ je lineární kombinací vektorů $(1, 2)$ a $(3, 1)$ s koeficienty 10 a 30. Kupující nejlépe využije výhodné nabídky, koupí-li 10 sad prvního typu a 30 sad druhého typu.

Poznámka: Spotřební koše uváděné v množství jednotlivých komponent $\vec{q}=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ se v jednoduchých ekonomických modelech prezentují jako vektory; odpovídají jim vektory cen $\vec{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ uváděné v cenách za jednotku množství. Celková cena spotřebního koše je pak rovna skalárnímu součinu obou vektorů, tedy reálnému číslu

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n.$$

Příklad 2

Rodina hodlá nakoupit 5 kg mouky, 20 vajec, 5 l mléka, 2 kg meruněk a 4 ks $\frac{1}{4}$ kg másla. Spotřební koš je tedy dán vektorem $\vec{q}=(5, 20, 5, 2, 4)$. Předpokládejme, že 1 kg mouky stojí 10 Kč, 1 vejce 3 Kč, 1 l mléka 15 Kč, 1 kg meruněk 65 Kč a 1 ks másla 35 Kč. Cenový vektor je pak roven $\vec{p}=(10, 3, 15, 65, 35)$. Určete celkovou cenu spotřebního koše.

Řešení

Celková cena spotřebního koše je tedy rovna skalárnímu součinu vektorů

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (5, 20, 5, 2, 4) \cdot (10, 3, 15, 65, 35) = 5 \cdot 10 + 20 \cdot 3 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 65 + 4 \cdot 35 == 455 \text{ Kč}$$

Cvičení

1. Obchodník vyprodává zboží a, b , nabízí speciální zlevněné sady. Jak má postupovat zákazník, aby nakoupil co nejlevněji, pokud
 - a) v sadě prvního typu je 1 výrobek a a 3 výrobky b , v druhém typu jsou 4 výrobky a a 10 výrobků b , zákazník hodlá koupit 29 kusů výrobku a a 75 kusů výrobku b ?
 - b) v sadě prvního typu je 11 výrobků a a 4 výrobky b , v druhém typu jsou 2 výrobky a a 9 výrobků b , zákazník hodlá koupit 50 kusů výrobku a a 43 kusů výrobku b ?

2. Pomocí výpočtu skalárního součinu vektorů určete hodnotu spotřebního koše, pokud
- a) zákazník hodlá koupit 4 páry ponožek, 1 sako, 2 kalhoty a 5 košil, přičemž jeden pár ponožek stojí 30 Kč, sako 1 200 Kč, kalhoty 750 Kč a košile 320 Kč,
 - b) zákazník hodlá koupit 2 malé skříňky, 3 velké skříňky a 1 digestoř, přičemž malá skříňka stojí 1 030 Kč, velká skříňka 2 200 Kč, a digestoř 3 320 Kč.

Řešení

- 1. a) 5 sad prvního typu, 6 sad druhého typu,
b) 4 sady prvního typu, 3 sady druhého typu
- 2. a) 4 420 Kč,
b) 11 980 Kč.

2. Maticová algebra I

Matice a jejich vlastnosti

Maticí typu $m \times n$ rozumíme schéma $m \times n$ prvků (reálných čísel) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Prvky matice označujeme dvojitým indexem- první udává řádek a druhý sloupec, ve kterém se prvek nachází. Matice označujeme velkými písmeny:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

stručně zapisujeme $A = (a_{ij})_{m \times n}$ nebo jen $A = (a_{ij})$.

Matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule, se nazývá **nulová matice**. Matice typu $n \times n$ se nazývá **čtvercová matice (řádu n)**.

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ se nazývají **diagonální prvky**, tvoří tzv. hlavní diagonálu matice.

Čtvercová matice, která má na diagonále jedničky a všude jinde nuly, se nazývá **jednotková matice**; budeme ji značit J , případně s vyznačením řádu, např. $J_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matice, která má pod hlavní diagonálou všechny prvky rovny nule, se nazývá **trojúhelníková matice**.

Zaměníme-li v matici A řádky za sloupce, dostaneme tzv. **matici transponovanou k matici A** (ozn. A^T). Matice A je pak maticí transponovanou k matici A^T (matice A a A^T jsou navzájem transponované).

Příklad 1

Matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ je matice typu 3×4 ; např. prvek $a_{23} = 7$, $a_{34} = 9$.

Prvky hlavní diagonály jsou $a_{11} = -1, a_{22} = -4, a_{33} = -5$.

Matice $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu tři. Prvky hlavní diagonály jsou $a_{11} = 3, a_{22} = 0, a_{33} = 6$.

Matice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je nulová matice typu 2×3 .

Příklad 2

Je dána matice A , určete matici A^T .

Matice A je dána $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$, tedy transponovaná $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

Hodnost matice

Hodnost matice $h(A)$ definujeme jako počet jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost nulové matice je 0. Hodnost označujeme $h(A)$ nebo jen h .

Pozn.: hodnost matice určíme pomocí odstupňované matice.

Řekneme, že **matice je odstupňovaná**, má-li v prvním řádku aspoň jeden nenulový prvek a každý další řádek má zleva aspoň o jednu nulu víc než řádek předchozí.

Příklad 3

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou odstupňované.

$$\text{Matice } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ nejsou odstupňované.}$$

Platí: Hodnost odstupňované matice je rovna počtu jejích nenulových řádků (nenulový řádek je řádek obsahující aspoň jeden nenulový prvek). Nulové řádky je při počítání hodnosti matice možno vynechat.

Příklad 4

Hodnost matic A, B, C, D, E z příkladu 4. je tedy: $h(A) = 3$, $h(B) = 3$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$, $h(E) = 1$.

Každou matici lze převést na odstupňovanou následujícími úpravami, které nemění její hodnost.

Úpravy (tzv. ekvivalentní), které nemění hodnost matice:

- záměna pořadí řádků
- vynásobení libovolného řádku nenulovým reálným číslem
- přičtení násobku libovolného řádku k jinému řádku
- vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních (po úpravách vyjde nulový).

Tytéž úpravy je možno provádět na sloupcích matice.

Převod matice na odstupňovanou a určení hodnosti matice

Příklad 5

Převeďte matici A na odstupňovanou a určete její hodnost, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ -5 & -6 & -7 & -16 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Převědeme postupně matici A pomocí úprav na odstupňovanou

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ -5 & -6 & -7 & -16 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrice je odstupňovaná a obsahuje 4 nenulové řádky (mezi druhou a třetí upravovanou maticí jsme vynechali jeden nulový řádek, proto jeden řádek chybí), hodnost matice $h(A) = 4$.

Příklad 6

Určete hodnost matice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení

Převědeme postupně matici B pomocí úprav na odstupňovanou, nejprve zaměníme 1. a 2. řádek (úpravy v matici jsou jednodušší, jestliže člen a_{11} matice má hodnotu 1 nebo -1 , v našem příkladu po výměně 1. a 2. řádku je $a_{11} = 1$), pak v druhé upravované matici 2. řádek dělíme 5 (snažíme se o co nejmenší hodnoty členů matice)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je $h(B) = 3$.

Příklad 7

Určete hodnost matice $C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha + 2 & 3\alpha + 4 \end{pmatrix}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení

Nejprve změním pořadí řádků tak, aby výrazy obsahující parametr byly „co nejméně vpravo dole“ - jinak by se při úpravách násobky parametru přičítaly k ostatním řádkům a počítání by bylo obtížnější (zaměníme 1. a 2. řádek) a vynulujeme členy 1. sloupce pod hlavní diagonálou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha + 2 & 3\alpha + 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha & 3\alpha + 2 \end{pmatrix}.$$

Dále vynásobíme druhý řádek číslem $(-\alpha)$, třetí řádek číslem $(\alpha - 1)$ proto, abychom po sečtení druhého s třetím řádkem dostali člen a_{32} roven 0 a upravili na odstupňovanou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha & 3\alpha + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & (\alpha - 1)(2\alpha + 2) \end{pmatrix}.$$

Nyní provedeme diskusi $h(C)$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Stačí vynulovat člen a_{33} matice C nebo členy 2. řádku matice C .

Závěr: Pro $(\alpha = 1 \vee \alpha = -1)$ je $h(C) = 2$; pro $(\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -1)$ je $h(C) = 3$.

Cvičení

1. Vypočítejte hodnost matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 6 \\ -3 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 1 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 3 & -7 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & -7 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad i) \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 11 & 10 \\ 2 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad j) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad l) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad m) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad n) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -4 \\ -6 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Vypočítejte hodnotu matice v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, resp. parametru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ -2 & -4 & \alpha \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 5 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \alpha \\ 3 & 2 & 3 & \beta \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky

1. a) $h = 3$, b) $h = 2$, c) $h = 3$, d) $h = 4$, e) $h = 2$, f) $h = 2$, g) $h = 3$, h) $h = 3$, i) $h = 2$,
 b) j) $h = 2$, k) $h = 3$, l) $h = 3$, m) $h = 4$, n) $h = 1$.

2. a) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow h = 2$

b) $b) \alpha = 1 \Rightarrow h = 1$; $\alpha = -2 \Rightarrow h = 2$; $(\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2) \Rightarrow h = 3$

c) c) $(\alpha = \frac{3}{2} \wedge \beta = 1) \Rightarrow h = 2$; $(\alpha \neq \frac{3}{2} \vee \beta \neq 1) \Rightarrow h = 3$

d) d) $\alpha = 1 \Rightarrow h = 2$; $\alpha \neq 1 \Rightarrow h = 3$

e) e) $\alpha = 1 \Rightarrow h = 2$; $\alpha \neq 1 \Rightarrow h = 3$

f) f) $(\alpha = 1 \wedge \beta = 2) \Rightarrow h = 2$; $(\alpha \neq 1 \vee \beta \neq 2) \Rightarrow h = 3$

g) g) $(\beta = 1 \vee \beta = 2) \Rightarrow h = 2$; $(\beta \neq 1 \wedge \beta \neq 2) \Rightarrow h = 3$.

3. Soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic

System

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná čísla a x_1, \dots, x_n jsou neznámé, se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**. Každou takovou soustavu lze popsat a řešit užitím matic. Matice koeficientů u jednotlivých neznámých, tj. matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se nazývá **matice soustavy**. Matice vytvořená z matice soustavy přidáním $(n + 1)$ -ho sloupce tvořeného hodnotami b_1, \dots, b_m (tento sloupec oddělíme svislou čarou), tj. matice

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy**.

Řešitelnost soustavy

Frobeniova věta:

Soustava má řešení, právě když hodnota matice soustavy $h = h(A)$ je rovna hodnotě rozšířené matice soustavy $h' = h'(A)$.

Také platí **věta (o počtu řešení soustavy rovnic)**:

Je-li soustava řešitelná a je-li hodnota matice soustavy h rovna počtu neznámých (ozn. n), má soustava právě jedno řešení. Je-li soustava řešitelná a je-li hodnota matice soustavy menší než počet neznámých, má soustava nekonečně mnoho řešení, přičemž číslo $(n - h)$ udává počet volitelných neznámých (ty lze volit libovolně, ostatní neznámé jsou na této volbě závislé).

Obě věty dokazovat nebudeme, důkaz je uveden v citované literatuře.

Mohou tedy nastat pouze tyto možnosti:

- $h < h'$... soustava nemá řešení
- $h = h'$... soustava má řešení $\left\{ \begin{array}{l} h = h' = n \dots \text{právě jedno řešení} \\ h = h' < n \dots \text{nekonečně mnoho řešení,} \end{array} \right.$

přičemž $n - h = \text{počet volitelných neznámých}$.

Pozn.: Hodnost h' může být maximálně o 1 větší než h (rozšířená matice má o 1 sloupec víc než matice soustavy).

Soustavy lineárních rovnic řešíme 4 způsoby:

- a) Gaussova eliminační metoda
- b) Jordanova metoda (úplná eliminace)
- c) řešení pomocí inverzní matice (lze jen tehdy, pokud $h = n$, soustava má právě 1 řešení)
- d) řešení pomocí determinantů (Cramerovo pravidlo), také lze použít jen tehdy, pokud $h = n$.

Postup řešení soustav – Gaussova a Jordanova metoda

Příklad 1

Vyřešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -9 \\ -4x_1 + 5x_2 &= 22. \end{aligned}$$

Řešení

Soustavu lineárních rovnic přepíšeme do rozšířené matice soustavy a tu poté upravujeme pomocí ekvivalentních úprav (viz. str. 9) na odstupňovanou matici soustavy (pozor, **nezaměňujeme sloupce matice A**, to by odpovídalo změně pořadí neznámých v soustavě a tuto změnu bychom si museli pamatovat, ani nezaměňujeme sloupce se sloupcem pravé strany).

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 & -9 \\ -4 & 5 & 0 & 22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Dále určíme počet řešení pomocí věty o počtu řešení:

$$n = 3, h = 3, h' = 3 \Rightarrow \text{soustava má právě 1 řešení}$$

Gaussova metoda využívá k vyřešení soustavy odstupňovaného tvaru rozšířené matice soustavy. Gaussova metoda tedy spočívá v tom, že z poslední rovnice (v odstupňovaném tvaru)

vypočítáme neznámou x_3 , výsledek dosadíme do předposlední rovnice a takto „odspodu“ do-
počítáme všechny neznámé.

Z posledního řádku odstupňované matice vyplývá, že $x_3 = 1$.

Z druhého řádku odstupňované matice vyplývá, že $x_2 + x_3 = 3$, po dosazení za $x_3 = 1$ dosta-
neme $x_2 = 2$.

Z prvního řádku odstupňované matice vyplývá, že $2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5$, po dosazení za
 $x_3 = 1$ a $x_2 = 2$ dostaneme poslední neznámou $x_1 = -3$.

Řešením soustavy je tedy uspořádaná trojice hodnot $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, což můžeme
zapsat jako aritmetický vektor $\vec{x} = (-3, 2, 1)$.

Příklad 2

Vyřešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7.\end{aligned}$$

Řešení

Řešíme rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\3 & -7 & 1 & -5 & -6 \\0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\2 & -3 & -1 & -5 & -7\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\0 & 5 & -5 & -5 & -9 \\0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\0 & 5 & -5 & -5 & -9\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\0 & 5 & -5 & -5 & -9 \\0 & 5 & -5 & -5 & -9\end{array}\right) &\sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right).\end{aligned}$$

Dále určíme počet řešení pomocí věty o počtu řešení a Frobeniovy věty:

$n = 4, h = 2, h' = 3 \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

Příklad 3

Vyřešte soustavu lineárních rovnic z příkladu 1. pomocí Jordanovy metody

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -9 \\-4x_1 + 5x_2 &= 22.\end{aligned}$$

Řešení

Obě metody využívají odstupňovaného tvaru matice, na začátku jsou obě metody stejné, Jordanova metoda pokračuje v úpravě matice A soustavy až na jednotkovou matici. Výhodou této metody je, že sloupec pravé strany určuje vektor řešení (nemusí se dopočítávat jako u Gaussovy metody). Nejvíce se metoda využívá u soustav lineárních rovnic, které mají právě jedno řešení.

Při Jordanově metodě budeme postupovat obdobně jako při převodu na odstupňovanou matici, ale dále od posledního řádku směrem nahoru upravujeme nuly zprava doleva (obráceně než tomu bylo při úpravě matice soustavy na odstupňovanou):

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 & -9 \\ -4 & 5 & 0 & 22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Je zřejmé, že sloupec pravé strany představuje aritmetický vektor řešení $\vec{x} = (-3, 2, 1)$.

Příklad 4

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_3 = 4.$$

Řešení

Převédeme soustavu na rozšířenou matici soustavy a určíme pomocí věty počet řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Rozšířená matice je rovnou v odstupňovaném tvaru, není třeba upravovat, určíme:

$n = 3 > h = 2 = h' \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení; nutno volit $n - h = 1$ parametr. **Pozor na volbu parametru!** Není úplně libovolné, za jakou neznámou parametr volíme, vždy volba parametru závisí na tvaru odstupňované matice upravené z původní matice soustavy.

V našem příkladu z druhého řádku odstupňované matice soustavy vyplývá, že $x_3 = 2$. Volit parametr můžeme tedy pouze za neznámou x_1 nebo x_2 . Přepíšeme-li první řádek matice do rovnice a dosadíme za x_3 , dostaneme: $x_1 + 3x_2 + 2 = 1 \Rightarrow x_1 + 3x_2 = -1$.

Pokud volíme parametr za neznámou $x_2 = t; t \in \mathbb{R}$, pak je x_1 rovno $x_1 = -1 - 3t$.

Výsledný aritmetický vektor řešení pak zapíšeme $\vec{x} = (-1 - 3t, t, 2); t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Pokud bychom parametr volili za neznámou x_1 , řešení by samozřejmě mělo jiný tvar: $\vec{x} = \left(s, \frac{-1}{3} - \frac{s}{3}, 2\right)$; $s \in \mathbb{R}$.

Cvičení

1. Řešte následující soustavy. V případě, že soustava má nekonečně mnoho řešení, nalezněte obecné řešení.

a) $-x_1 + x_2 + x_3 = -2$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16$$

$$6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 27,$$

b) $2x_1 + 2x_3 = 2$

$$-x_2 = -1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1,$$

c) $x_1 - x_2 = 5$

$$-x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 = 2,$$

d) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

e) $x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$$

$$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 4,$$

f) $-2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0,$$

g) $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 = 1,$$

h) $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -9$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$-3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 15$$

2. Řešte soustavy reprezentované následujícími rozšířenými maticemi. V případě, že soustava má nekonečně mnoho řešení, nalezněte obecné řešení.

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -8 & 2 \\ 2 & -6 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 5 & -10 & -1 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -9 \\ 4 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$

h) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right)$

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

3. Řešte soustavy reprezentované následujícími rozšířenými maticemi pomocí Jordanovy metody úplné eliminace.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -3 & -7 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -7 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Výsledky

1. a) $\vec{x} = (3, -1, 2)$
 b) nemá řešení
 c) $\vec{x} = (4, -1)$
 d) $\vec{x} = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}t, \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t, t\right)$
 e) $\vec{x} = (2 + s - t, s, 1 + t, t)$
 f) $\vec{x} = (1 - t, 1 - t, t)$,
 g) $\vec{x} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
 h) $\vec{x} = (-2, 2, -7, 0)$
2. a) nemá řešení
 b) $\vec{x} = (1 + t, -t, -t, t)$
 c) $\vec{x} = (0, 1, 2)$,
 d) $\vec{x} = (-1, 4)$,
 e) $\vec{x} = (-2 + 3s, s, 1 + 2t, t)$
 f) nemá řešení
 g) $\vec{x} = (1, 2, 5)$
 h) $\vec{x} = (2, -1)$,
 i) $\vec{x} = (1, -1, 1)$
3. a) $\vec{x} = (1, -1, 1)$
 b) $\vec{x} = (11, -5, 0)$
 c) $\vec{x} = \left(\frac{26}{5}, \frac{1}{5}, -6\right)$
 d) $\vec{x} = (2, -1, 1, -4)$
 e) $\vec{x} = (3, 1, 0, -1)$
 f) $\vec{x} = (0, 0, 0)$

Aplikační příklady z praxe I (využívající teorii soustav lineárních rovnic)

Příklad 1

Na základě statistických údajů se zjistilo, že závislost množství statku z poptávaného v průběhu jednoho týdne lze popsat vztahem $q_d = 30 - 2p$. Množství nabízené je ovlivněno cenou na základě vztahu $q_s = -2 + 2p$, kde q_d , resp. q_s je nabízené, resp. poptávané množství v kusech, p je cena v Kč za kus. Určeme rovnovážnou cenu zboží z .

Řešení

Vydeme z rovnosti množství nabízeného a poptávaného zboží:

$$\begin{aligned}q_d &= q_s, \\30 - 2p &= -2 + 2p, \\p &= 8.\end{aligned}$$

Rovnovážná cena je 8 Kč/ks.

Poznámka: Stejným způsobem lze zkoumat rovnovážný stav na trhu s více druhy zboží- jako v příkladu 2.

Příklad 2

Na trhu dvou druhů zboží z_1 a z_2 je nabídka (q_{1s} pro z_1 , q_{2s} pro z_2) a poptávka (q_{1d} pro z_1 , q_{2d} pro z_2) popsána vztahy:

$$\begin{aligned}q_{1s} &= -1 + p_1, & q_{1d} &= 31 - 2p_1 - p_2, \\q_{2s} &= p_2, & q_{2d} &= 40 - 2p_2 - p_1,\end{aligned}$$

kde p_1 , resp. p_2 je cena za jednotku zboží z_1 , resp. z_2 a vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Řešení

$$\begin{aligned}q_{1s} = q_{1d} &\Leftrightarrow -1 + p_1 = 31 - 2p_1 - p_2 \Leftrightarrow 3p_1 + p_2 = 32, \\q_{2s} = q_{2d} &\Leftrightarrow p_2 = 40 - 2p_2 - p_1 \Leftrightarrow p_1 + 3p_2 = 40.\end{aligned}$$

Řešíme pomocí Gaussovy eliminační metody. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 32 \\1 & 3 & 40\end{array}\right).$$

Vynásobíme-li druhý řádek číslem (-3) a poté k němu přičteme první řádek, získáme trojúhelníkovou matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 32 \\ 0 & -8 & -88 \end{array} \right),$$

které přiřadíme soustavu

$$3p_1 + p_2 = 32,$$

$$-8p_2 = -88.$$

Z druhé rovnice získáme $p_2 = 11$ a po dosazení do první rovnice $p_1 = 7$.

Soustava má právě jednoho řešení $p_1 = 7\text{Kč/ks}$ (rovnovážná cena výrobku z_1),

$p_2 = 11\text{Kč/ks}$ (rovnovážná cena výrobku z_2).

Poznámka: IS-LM model je makroekonomický model, který říká, že rovnováha na trhu zboží a peněz nastává v průsečíku křivek IS a LM. Křivka IS je grafem funkce, která popisuje vztah mezi úrokovou sazbou i a úrovní důchodu Y za podmínky, že trh zboží a služeb je v rovnováze s trhem peněz (a ostatních aktiv).

Příklad 3

Určeme rovnovážnou úrokovou sazbu, je-li křivka IS dána předpisem $i = 10 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -8 + 4Y$, i je udávána v %, Y v miliardách \$.

Řešení

Po úpravě řešíme soustavu lineárních rovnic

$$i + 2Y = 10,$$

$$i - 4Y = -8.$$

Například užitím Gaussovy eliminační metody určíme řešení. Soustava má právě jedno řešení $i = 4\%$, $Y = 3$ *miliardy* \$.

Na závěr uveďme příklad z praktického života amerických firem.

Příklad 4

Americká firma, která měla zisk 200 000 \$ před zdaněním, se rozhodla věnovat 2 % ze zdaněného zisku na charitativní účely. Musí zaplatit státní daň 5 % ze zisku (po zaplacení charitě) a federální daň 40 % (po zaplacení charitě a státní daně). Kolik zaplatí státní daň, federální daň a kolik věnuje na charitu?

Řešení

Označme x_1 obnos určený charitě, x_2 státní daň, x_3 federální daň.

Pro obnos na charitu platí: $x_1 = 0,02(200000 - (x_2 + x_3))$, neboli $x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 = 4000$.

Pro státní daň platí: $x_2 = 0,05(200000 - (x_1 + x_3))$, neboli $0,05x_1 + x_2 = 10000$.

Pro federální daň platí: $x_3 = 0,40(200000 - (x_1 + x_2))$, neboli $0,4x_1 + 0,4x_2 + x_3 = 80000$.

Z daných vztahů sestavíme soustavu lineárních rovnic:

$$x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 = 4000,$$

$$0,05x_1 + x_2 = 10000,$$

$$0,4x_1 + 0,4x_2 + x_3 = 80000.$$

Řešením soustavy, např. užitím Gaussovy metody, dostaneme přibližné hodnoty $x_1 = 2300$ \$ (určeno pro charitu), $x_2 = 9800$ \$ (státní daň), $x_3 = 75126$ \$ (federální daň).

Cvičení

- Určete rovnovážnou cenu trhu jednoho statku, je-li (ceny p jsou v Kč/ks, množství q_d, q_s v kusech)
 - poptávka dána funkcí $q_d = 30000 - 3p$, nabídka dána funkcí $q_s = 3p - 90000$,
 - poptávka dána funkcí $q_d = 4000 - 2p$, nabídka dána funkcí $q_s = 4p - 5000$.
- Určete rovnovážné ceny na trhu více statků, je-li (ceny p_i jsou v Kč/ks, množství q_{id}, q_{is} v kusech, $i = 1, 2, 3$)
 - pro první statek poptávka dána funkcí $q_{1d} = 100 - 5p_1 + 3p_2$, nabídka dána funkcí $q_{1s} = 3p_1 - 10$, pro druhý statek poptávka dána funkcí $q_{2d} = 120 - 8p_2 + 2p_1$, nabídka dána funkcí $q_{2s} = 5p_2 - 20$,
 - pro první statek poptávka dána funkcí $q_{1d} = 20 - p_1 - p_3$, nabídka dána funkcí $q_{1s} = p_1 - 10$, pro druhý statek poptávka dána funkcí $q_{2d} = 40 - 2p_2 - p_3$, nabídka dána funkcí $q_{2s} = 2p_2$, pro třetí statek poptávka dána funkcí $q_{3d} = 10 + p_2 - p_3 - p_1$, nabídka dána funkcí $q_{3s} = 3p_3 - 5$.
- Určete rovnovážnou úrokovou sazbu a úroveň důchodu, je-li
 - křivka IS dána předpisem $i = 7 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -5 + 4Y$,
 - křivka IS dána předpisem $i = 13 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -11 + 4Y$.

Výsledky

1. a) $p = 20\,000 \text{ Kč/ks}$
b) $p = 1\,500 \text{ Kč/ks}$
2. a) $p_1 = \frac{370}{17} \text{ Kč/ks}$, $p_2 = \frac{240}{17} \text{ Kč/ks}$
b) $p_1 = \frac{41}{3} \text{ Kč/ks}$, $p_2 = \frac{28}{3} \text{ Kč/ks}$, $p_3 = \frac{8}{3} \text{ Kč/ks}$
3. a) $i = 3$, $Y = 2$
b) $i = 5$, $Y = 4$

4. Maticová algebra II

Operace s maticemi

Podobně jako u aritmetických vektorů zavedeme **sčítání matic stejného typu** (sečteme prvky na stejných pozicích) a **násobení matice reálným číslem** (vynásobíme každý prvek tímto číslem). V dalším textu opět nebudou důsledně typy matic uvedeny- není-li typ uveden, předpokládáme při sčítání matice stejného typu:

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$c \cdot A = c \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (c \cdot a_{ij})_{m \times n} \quad c \in \mathbb{R}$$

Příklad 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -6 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ nedefinováno.}$$

Platí: A, B, C – matice stejného typu, k, l – reálná čísla

- (1) $A + B = B + A$,
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (3) $k(A + B) = kA + kB$,
- (4) $(k + l)A = kA + lA$,
- (5) $k(lA) = (kl)A$.

Součin matic $A \cdot B$

Dvě matice lze vynásobit pouze tehdy, má-li první matice tolik sloupců, kolik druhá řádků: je-li matice A typu $m \times n$, matice B typu $n \times p$, pak lze provést součin $A \cdot B$ (výsledkem bude matice C typu $m \times p$). Označíme-li prvky matice $A \cdot B$ jako c_{ij} , pak platí, že prvek c_{ij} je skalárním součinem i -tého řádku matice A a j -tého sloupce matice B :

$$\text{tedy } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \dots & \mathbf{a}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b}_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \mathbf{b}_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \mathbf{b}_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Příklad 2

Vypočítejte součin matic $A \cdot B = C$, $D \cdot E = F$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Součin $A \cdot B$ **je definován**, neboť matice A je typu 2×2 , matice B je typu 2×3 , tedy první má 2 sloupce a druhá 2 řádky a součin spočítáme jako skalární součin 1. a 2. řádku (postupně) matice A s 1. a 2. sloupcem (postupně) matice B :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 4, & 0 + 3, & 10 + 4 \\ -6 + 4, & 0 - 3, & 15 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 14 \\ -2 & -3 & 11 \end{pmatrix},$$

součin $D \cdot E$ **není definován**, neboť matice D je typu 2×3 , matice E je typu 2×3 , tedy první má 3 sloupce a druhá 2 řádky.

Příklad 3

Vypočítejte součin matic $A \cdot B$, $B \cdot A$, $C \cdot D$, $D \cdot C$, $E \cdot F$, $F \cdot E$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 6 \\ 11 & 6 & -8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad A \cdot B \neq B \cdot A.$$

$$C_{2 \times 2} \cdot D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad D_{2 \times 2} \cdot C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad C \cdot D \neq D \cdot C.$$

$$E_{2 \times 2} \cdot F_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -30 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad F_{2 \times 2} \cdot E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -30 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad E \cdot F = F \cdot E.$$

Příklad 4

Vypočítejte součin matic $A \cdot J$, $J \cdot A$, kde J je jednotková matice příslušného typu:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A_{2 \times 3} \cdot J_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = A,$$

$$J_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Vlastnosti násobení matic

Platí: A, B, C, D – matice vhodných typů, c – reálné číslo

- (1) $A \cdot B \neq B \cdot A$, **násobení matic není komutativní**,
- (2) J je jednotková matice; $A_{m \times n} \cdot J_{n \times n} = A_{m \times n}$, $J_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$,
- (3) $cAB = AcB = ABC$,
- (4) $A(BC) = (AB)C$,
- (5) $A(B + C) = AB + AC$,
- (6) $(A + B)C = AC + BC$,
- (7) $(AB)^T = B^T A^T$, kde A^T je transponovaná matice k matici A (resp. B^T je transponovaná k B).

*Poznámka: **Pozor:*** při provádění operací s maticemi není možné matice upravovat jako při výpočtu hodnoty matice, tedy např. vynechat nějaký řádek, vydělit řádek číslem nebo u dvou stejných řádků matice jeden vynechat apod.!

Poznámka: Podobně jako u čísel definujeme mocninu matice: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ atd.

Je **nutné výslovně zdůraznit**, že např. A^2 nevznikne z matice A umocněním všech prvků matice A na druhou!

Příklad 5

Vypočítejte A^2 , A^3 , B^2 , B^3 k maticím:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

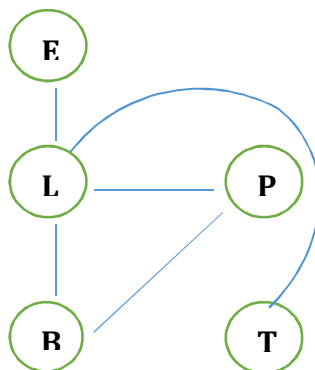
$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 4 & 2 \\ -3 & -13 & -7 \\ 6 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Aplikační příklady z praxe II (využívající maticovou algebru)

Příklad 6

Letové řády (analýza sítě letecké dopravy)

Síť znázorňuje přímé letecké spoje mezi městy Londýn (L), Paříž (P), Edinburgh (E), Bordeaux (B) a Toulouse (T).



- Zapište čtvercovou matici A se řádky a sloupci označujících tyto letecké destinace. Matice bude obsahovat číslice 1 a 0, kde 1 znamená, že mezi místy existuje přímý spoj a 0 znamená, že mezi místy neexistuje přímý spoj.
- Pomocí součinu matic $A \cdot A = A^2$ zjistíte počet možných tras mezi dvěma letišti s jednou zastávkou.
- Počet přímých letů nebo leteckých spojení s jednou zastávkou vypočítáme pomocí maticové rovnice $X = A + A^2$.

Příklad 7

Týdenní produkce společnosti

Přepište tabulku produkce 3 závodů a 4 produktů pomocí matice A :

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
Závod 1	7 tisíc kusů	5 tisíc kusů	0 tisíc kusů	1 tisíc kusů
Závod 2	0 tisíc kusů	4 tisíc kusů	3 tisíc kusů	7 tisíc kusů
Závod 3	3 tisíc kusů	2 tisíc kusů	0 tisíc kusů	2 tisíc kusů

Další týden:

Produkce zapsaná pomocí matice B $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Úkoly

- Jaká je celková produkce za oba týdny? Řešte pomocí součtu matic $A + B$.

b) Zisky společnosti za výrobky 1,2,3,4 vyjádříme maticí $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Určete zisk společnosti pro dané 3 závody pomocí matice $(A \cdot Z)$.

Vysvětlete, proč zisk společnosti pro dané 3 závody nelze určit pomocí matice $(Z \cdot A)$

c) Objemy zásob pro logistiku firmy pro jednotlivé výrobky určuje matice $V = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Určete přehledně zisk i nároky na skladování pro dané 3 závody.

Určujeme pomocí součinu matic $A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 4 \\ 6 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

Inverzní matice

Nechť A je čtvercová matice. **Inverzní maticí k matici A** nazveme matici A^{-1} , pro kterou platí

$$A \cdot A^{-1} = J.$$

Platí: A^{-1} existuje, právě tehdy když je matice A regulární (čtvercová matice s lineárně nezávislými řádky). Ke každé regulární matici A existuje právě jedna inverzní matice A^{-1} .

Poznámka: K singulární matici (čtvercová matice s lineárně závislými řádky) tedy inverzní matice neexistuje.

Věty o vlastnostech inverzních matic

Platí: Je-li matice A regulární, pak A^{-1} je také regulární.

Platí: A, B - regulární matice stejného řádu, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$, tedy matice A a A^{-1} jsou navzájem inverzní,
- (2) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = J$,
- (3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- (4) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice

Matici A , k níž chceme spočítat inverzní matici, dáme do levé části „dvojmatice“, za svislou čarou napíšeme jednotkovou matici stejného řádu, jako je řád matice A . Úpravami na řádcích této „dvojmatice“ převedeme matici A na jednotkovou matici- stejně jako při řešení soustav Jordanovou metodou. Se sloupci matice žádné úpravy neprovádíme. Pokud je matice A regulární, vznikne na místě původně jednotkové matice inverzní matice A^{-1} (pokud je matice A singulární, vynuluje se jeden řádek matice A a inverzní matice nejde dopočítat):

$$(A|J) \sim \dots \sim (J|A^{-1}).$$

Příklad 8

Vypočtete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -4 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 9 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

$$\text{Tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -11 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli udělat zkoušku, stačí ověřit, že $A \cdot A^{-1} = J$. Jelikož se lépe násobí celočíselné matice, vytkneme z matice A^{-1} číslo $\frac{1}{2}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -11 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Vypočítejte z následujících vztahů x, y, z, v :

$$a) 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} y & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & u-10 \\ 3 & 10-v \end{pmatrix}$$

$$b) 2 \begin{pmatrix} x & u \\ -y & 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 4v \\ -2x & 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítejte součiny matic A, B (pokud je definován):

$$a) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad d) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítejte inverzní matici A^{-1} k maticím A :

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad h) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Vypočítejte $A^{-1}, B^{-1}, AB, (AB)^{-1}$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Výsledky

1. a) $x = 3, y = 1, u = 3, v = -1$, b) $x = 1 - t, y = t, u = -5 - 2s, v = s$; $s, t \in \mathbb{R}$.

2. a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 22 & -10 \\ -6 & 21 & -9 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ 17 & -9 & 11 \end{pmatrix}$, b) AB nelze, $BA = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 2 & -2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$,

c) $AB = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, d) *nedefinováno ani AB ani BA*,

e) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, f) AB *nedefinováno*, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 13 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. a) $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -13 & -5 & -4 \end{pmatrix}$,

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ -4 & 8 & -9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

g) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -8 & 100 & 5 \\ -8 & 15 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

Maticové rovnice

Maticovou rovnicí se nazývá každá rovnice, v níž každé písmenko v rovnici představuje matici. Uvažujme **maticovou rovnici** $AX = B$, kde matice A, B jsou typu $A_{n \times n}, B_{n \times p}$ a X je neznámá matice, kterou chceme z rovnice vyjádřit. Dělení matic není definováno, proto abychom se matice A v rovnici „zbavili“, vynásobíme celou rovnici maticí inverzní k matici A , pokud je A regulární. Protože násobení matic není komutativní, je třeba rozlišovat **násobení rovnice maticí zprava nebo zleva**:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Platí: Je-li A regulární, má rovnice $AX = B$ právě jedno řešení $X = A^{-1}B$.

Příklad 9

Vypočtěte matici X z maticové rovnice $AX = 2B$, je-li dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Z maticové rovnice $AX = 2B$ nejprve vyjádříme obecně matici X :

$$X = A^{-1} \cdot 2B,$$

pak vypočteme inverzní matici k matici A (za předpokladu, že je matice A regulární):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Inverzní matice A^{-1} je tedy $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Nakonec vynásobíme matici A^{-1} s maticí $2B$:

$$X = A^{-1} \cdot 2B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku můžeme provést tak, že výslednou matici X dosadíme do zadání a ověříme rovnost pravé a levé strany.

Příklad 10

Vypočtěte matici X z maticové rovnice $XA - 2XB = C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Z maticové rovnice $XA - 2XB = C$ nejprve vyjádříme obecně matici X :

$$X = C \cdot (A - 2B)^{-1}.$$

Pak postupně vypočítáme $(A - 2B)$: $(A - 2B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$

dále $(A - 2B)^{-1}$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right), (A - 2B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

nakonec spolu vynásobíme matici C a $(A - 2B)^{-1}$ (pozor- je nutné dodržet pořadí součinu tak, jak jsme ho vyjádřili obecně ze zadání, neboť součin matic není komutativní!).

Tedy $X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 20 & 36 \\ -8 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$

Zkoušku můžeme opět provést dosazením matice X do zadání a ověření rovnosti pravé a levé strany zadání po vynásobení matic.

Cvičení

1. Řešte maticovou rovnici $AX = B$ pro dané matice A, B :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

2. Z maticové rovnice nejdříve vyjádřete matici X , do výsledku pak dosadte dané matice a vypočítejte:

a) $AX - A = BX$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$

b) $XA + XB = 2X + B$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$

c) $3AX - 2X = 10J$, kde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

d) $C + XA = BA$, kde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

3. Určete matici X vyhovující maticové rovnici $AX = B - 3X + A$, kde

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. Řešte maticové rovnice pro zadané matice A, B, C :

a) $5X - A - 2C = A - B + 4X + C,$

b) $\frac{1}{2}X = A + 2B - 5C,$

c) $3A - X = 2A + C,$

d) $2X - B + 2C = A + 2B + 3X - C,$

kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Výsledky

1. a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

b) nemá řešení,

c) $X = \begin{pmatrix} 1 - 2s & 2 - 2t \\ s & t \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R},$

d) $X = \begin{pmatrix} 3 - 2s & 5 - 2t \\ s & t \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R},$

e) nemá řešení,

f) $X = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$

2. a) $X = (A - B)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix},$

b) $X = B \cdot (A + B - 2J)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$

c) $X = 10(3A - 2J)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$

d) $X = (BA - C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

3. a) nemá řešení,

b) $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$

c) $X = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 31 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$

4. a) $X = 2A - B + 3C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 14 & 1 \end{pmatrix},$

b) $X = 2A + 4B - 10C = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 6 & -30 & 6 \\ -20 & 0 & 2 & -38 & 6 \end{pmatrix},$

c) $X = A - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$

d) $X = -A - 3B + 3C = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 & 9 & -4 \\ 6 & 0 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$

Řešení soustavy lineárních rovnic užitím inverzní matice

Každou soustavu lze zapsat jako maticovou rovnici $AX = B$, kde matice $A_{m \times n}$ je matice soustavy (matice koeficientů u neznámých na levé straně rovnice), matice $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je sloupcový vektor neznámých (matice je transponovaná typu $X_{n \times 1}$, aby byl součin matic $A \cdot X$ definován), matice B je sloupcový vektor pravých stran soustavy (opět transponovaný vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T = B_{n \times 1}$).

Homogenní soustava je soustava lineárních rovnic, která má na pravé straně samé nuly. Tuto soustavu lze zapsat jako maticovou rovnici $AX = O$, kde O je nulový vektor $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Příklad 1

$$\begin{aligned} \text{Soustavu} \quad & 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{aligned}$$

napište jako maticovou rovnici.

Řešení

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Soustavu $AX = B$ lze řešit jako **maticovou rovnici**. Je-li A regulární matice, dostaneme vektor řešení $\vec{x} = A^{-1}B$ (vyjde právě jedno řešení soustavy lineárních rovnic, matice A^{-1} je inverzní maticí k matici A , matici A^{-1} násobíme zleva s maticí B sloupce pravé strany).

Příklad 2

Užitím inverzní matice vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 &= -5. \end{aligned}$$

Řešení

Řešení soustavy je dané vztahem $X = A^{-1}B$. Tedy nejdříve musíme najít matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. Tuto matici A^{-1} jsme našli v příkladu 8. (str. 26):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -11 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daná soustava má právě jedno řešení dané vztahem

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -11 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy je tedy $x_1 = 16$, $x_2 = -7$, $x_3 = 2$.

Poznámka: Řešení jediné soustavy užitím inverzní matice není efektivní – je příliš pracné. Metoda je ale dobře využitelná v případech, kdy je třeba řešit více soustav se stejnou maticí soustavy, ale různými pravými stranami. Zápis $AX = B$ je ale velmi praktický a hojně používaný při formulaci různých tvrzení o soustavách rovnic.

Cvičení

Řešte následující soustavy pomocí inverzní matice:

a) $3x_1 - x_2 = 21$

$$x_1 + 2x_2 = 14$$

b) $x_2 + 3x_3 = -2$

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

c) $-3x_1 - 2x_2 = 1$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

d) $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

$$2x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

e) $3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$$7x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -1$$

$$6x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 1$$

f) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21$$

Výsledky

a) $x_1 = 8$, $x_2 = 3$

c) $x_1 = 5$, $x_2 = -8$,

e) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 6$,

b) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$,

d) $x_1 = -3$, $x_2 = -9$, $x_3 = -8$,

f) $x_1 = -\frac{9}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_3 = 4$.

Aplikační příklady z praxe III

Příklad 1

Spotřebitelé A, B, C hodlají zakoupit zboží z_1, z_2, z_3, z_4 , každý ze spotřebitelů v jiném množství. Celý nákup může každý ze spotřebitelů zrealizovat buď v obchodě O_1 nebo v O_2 . Který obchod bude pro kterého spotřebitele výhodnější?

Tab. 1.1. Požadované množství zboží

	z_1	z_2	z_3	z_4
A	6	5	3	1
B	3	6	2	2
C	3	4	3	1

Tab. 1.2. Ceny v obchodech O_1 a O_2

	O_1	O_2
z_1	1,50	1,00
z_2	2,00	2,00
z_3	5,00	4,50
z_4	16,00	17,00

V tabulce 1.1 je uvedeno, kolik kusů zboží z_1, z_2, z_3, z_4 každý ze spotřebitelů požaduje, tabulka 1.2 uvádí ceny zboží v obchodech O_1, O_2 .

Řešení

Z tabulek je zřejmé, že např. spotřebitel A zaplatí

- v obchodě O_1 : $6 \cdot 1,50 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 5,00 + 1 \cdot 16,00 = 47$
- v obchodě O_2 : $6 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 4,50 + 1 \cdot 17,00 = 45$; podobně pro spotřebitele B, C.

Částku zaplacenou spotřebitelem A v obchodě O_1 lze zapsat jako skalární součin vektoru $\vec{q}_1 = (6, 5, 3, 1)$ (udávajícího počet kusů zboží požadovaný spotřebitelem A) a vektoru $\vec{p}_1 = (1,00; 2,00; 5,00; 16,00)$ (udávajícího ceny zboží v obchodě O_1)

Tedy

$\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_1 = (6, 5, 3, 1) \cdot (1,00; 2,00; 5,00; 16,00) = 6 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 5,00 + 1 \cdot 16,00 = 47$,
částku zaplacenou spotřebitelem A v obchodě O_2 jako skalární součin

$\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_2 = (6, 5, 3, 1) \cdot (1,00; 2,00; 4,00; 17,00) = 6 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 4,00 + 1 \cdot 17,00 = 45$.

Celkově lze ceny zaplacené spotřebitelem A, B, C v každém z obchodů O_1, O_2 zapsat pomocí

součinu matic, poptávkové matice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a cenové matice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$.

Např. první řádek matice $R = Q \cdot P = \begin{pmatrix} 47 & 45 \\ 57 & 57 \\ 42 & 40 \end{pmatrix}$ vyjadřuje částku, kterou zaplatí spotřebitel A v obchodě O_1 (prvek r_{11}) a v obchodě O_2 (prvek r_{12}).

Jak je vidět, je pro spotřebitele A a C výhodnější nakoupit v obchodě O_2 , spotřebitel B by zaplatil stejně v O_1 jako v O_2 .

Příklad 2

Uvažujme tři výrobce A_1, A_2, A_3 ; každý z nich vyrábí jeden druh zboží z_1, z_2, z_3 , každý prodává pouze ostatním dvěma a nakupuje jen od nich. Následující tabulka 1.3 uvádí podíl jednotlivých výrobců na spotřebě jednotlivých výrobků:

Tabulka 1.3

	z_1	z_2	z_3
A_1	0,6	0,2	0,3
A_2	0,1	0,7	0,2
A_3	0,3	0,1	0,5

Např. první sloupec udává, že 60 % produktů z_1 spotřebuje sám výrobce A_1 , 10 % odebere výrobce A_2 a 30 % odebere A_3 . Je tedy zřejmé, že součet čísel v každém sloupci je roven 1.

Řešení

Označme x_1, x_2, x_3 příjmy výrobců A_1, A_2, A_3 . Potom částka, kterou utratí A_1 celkem za z_1, z_2, z_3 , je $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$. Protože předpokládáme, že výdaje každého z výrobců jsou rovny jeho příjmům, dostáváme pro výrobce A_1 rovnici $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 = x_1$, podobně pro výrobce A_2, A_3 . Odtud dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 &= x_1, \\ 0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,2x_3 &= x_2, \\ 0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,5x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Tato soustava může být zapsána jako maticová rovnice $AX = X$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ a } X = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ je sloupcový vektor.}$$

Protože předpokládáme nezáporné příjmy jednotlivých výrobců, dostáváme navíc podmínku $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, 3$ (označíme $\vec{x} \geq \vec{0}$). Rovnici $AX = X$ můžeme přepsat v ekvivalentní formě

$(A - J)X = \vec{0}$. Matice $A - J$ je singulární, k řešení maticové rovnice nelze použít inverzní matice. Vyřešíme homogenní (s nulovými pravými stranami) soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,5 & 0 \end{array} \right)$$

Obecné řešení (tedy libovolné řešení) této soustavy má tvar $\vec{x} = t(13, 11, 10)$; podmínka $\vec{x} \geq \vec{0}$ bude splněna pro $t \geq 0$.

Tento výsledek znamená, že pro fungování tohoto modelu je třeba, aby příjmy výrobců A_1 , A_2 , A_3 byly v poměru 13:11:10.

Poznámka: Poznamenejme, že jde o lineární model produkce, ve kterém řešíme soustavu lineárních rovnic $x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, kterou lze zapsat jako maticovou rovnici

$$X = AX + B \text{ neboli (po převedení } X \text{ na jednu stranu) } (J - A)X = B.$$

Řešením je vektor (řádková matice) $X = (J - A)^{-1}B$. (tento postup využíváme v příkladu 3.)

Příklad 3

Předpokládejme, že k výrobě 1 tuny plodiny na farmě, která produkuje jednu plodinu a hnojivo, je třeba 0,2 t těžé plodiny a 0,2 t hnojiva, zatímco k produkci 1 t hnojiva je potřeba 0,4 t plodiny. Kolik tun plodiny a hnojiva musí farma každoročně produkovat, potřebuje-li pro vlastní spotřebu (či prodej) každoročně 8 tun plodiny 1 t hnojiva?

Řešení

Označme x_1 množství vyprodukované plodiny a x_2 množství hnojiva. Na produkci x_1 plodiny potřebujeme $0,2x_1$ plodiny a $0,2x_1$ hnojiva, na x_2 hnojiva potřebujeme $0,4x_2$ plodiny. Je tedy potřeba vyprodukovat $x_1 = 8 + 0,2x_1 + 0,4x_2$ plodiny a $x_2 = 1 + 0,2x_1$ hnojiva. Budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou lze reprezentovat jako maticovou rovnici

$$X = AX + B, \text{ kde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10,4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na rozdíl od předchozího příkladu je součet členů v jednotlivých sloupcích matice A menší než 1.

Maticovou rovnici převedeme na tvar $(J - A)X = B$ a vyřešíme ji pomocí inverzní matice. Rovnici vynásobíme zleva maticí $(J - A)^{-1}(J - A)X = (J - A)^{-1}B$.

Určíme inverzní matici k matici $J - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,2 & 1 \end{pmatrix}$, vyjde $(J - A)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$.

Dosadíme do maticové rovnice a určíme matici X :

$$X = (J - A)^{-1}B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10,4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jediným řešením je $x_1 = 15$ t plodiny a $x_2 = 4$ t hnojiva.

Následující příklad se týká teorie grafů, viz např. [PHC] v literatuře.

Příklad 4

Uvažujme skupinu výrobců A_1, \dots, A_n . položíme $a_{ij} = 1$, jestliže výrobce A_i může dodávat zboží výrobcí A_j , a pokud ne, položíme $a_{ij} = 0$ (navíc předpokládáme $a_{ii} = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$).

Uspořádáme tyto prvky do čtvercové matice A . Označme symbolem $A_i \rightarrow A_j$ skutečnost, že výrobce A_i může dodávat zboží výrobcí A_j . Např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

udává, že $A_1 \rightarrow A_2, A_1 \rightarrow A_4, A_2 \rightarrow A_3, A_3 \rightarrow A_1, A_3 \rightarrow A_4, A_4 \rightarrow A_1, A_4 \rightarrow A_2$. Protože $A_1 \rightarrow A_4$ a $A_4 \rightarrow A_1$, je zřejmé, že A_1 a A_4 si mohou dodávat zboží vzájemně.

Řešení

Podívejme se nyní, co představuje matice

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme prvky matice A^2 jako $(a^2)_{ij}$. Pak např.

$$(a^2)_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{34}a_{42} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

Toto číslo udává, že výrobce A_3 může dvěma způsoby dodávat výrobcí A_2 zboží ve dvou krocích (přes jednoho dalšího výrobce): $A_3 \rightarrow A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_2$ (neboť $a_{31}a_{12} = 1$) a $A_3 \rightarrow A_4 \wedge A_4 \rightarrow A_2$ (neboť $a_{34}a_{42} = 1$). Podobně: výrobce A_1 nemůže dodávat zboží výrobcí A_4 ve dvou krocích, protože $(a^2)_{14} = 0$ (ale může mu dodávat zboží přímo, jelikož $a_{14} = 1$).

Podobně prvek $(a^3)_{ij}$ matice A^3 udává počet způsobů, jak může výrobce A_i dodat zboží výrobcí A_j ve třech krocích:

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

odtud např. $(a^3)_{32} = (a^2)_{31}a_{12} + (a^2)_{32}a_{22} + (a^2)_{33}a_{32} + (a^2)_{34}a_{42} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$.

Jsou tedy dvě možnosti, jak může výrobce A_3 dodat zboží výrobcí A_2 ve třech krocích: $A_3 \rightarrow A_4 \wedge A_4 \rightarrow A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_2$ (neboť $(a^2)_{31}a_{12} = (a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{34}a_{41})a_{12} =$

$(0 + 0 + 0 + 1) \cdot 1 = 1)$ a $A_3 \rightarrow A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_4 \wedge A_4 \rightarrow A_2$ (neboť $(a^2)_{34}a_{42} = (a_{31}a_{14} + a_{32}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44})a_{42} = (1 + 0 + 0 + 0) \cdot 1 = 1$). Obecně je počet způsobů, jak doručit zboží od výrobce A_i k výrobcí A_j v nejvýše k krocích dán prvkem v i -tém řádku a j -tém sloupci matice $A + A^2 + A^3 + \dots + A^k$.

Tedy z matice (viz matice A, A^2, A^3 uvedené výše)

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

můžeme např. vyčíst, že jsou čtyři možnosti, jak může výrobce A_3 dodat zboží výrobcí A_2 v nanejvýš třech krocích.

Cvičení

- Spotřebitelé A, B , hodlají zakoupit zboží z_1, z_2, z_3, z_4 , každý ze spotřebitelů v jiném množství. Celý nákup může každý ze spotřebitelů zrealizovat buď v obchodě O_1 nebo v O_2 . V tabulce 1.3 je uvedeno, kolik kusů zboží z_1, z_2, z_3, z_4 každý ze spotřebitelů požaduje, tabulka T1 uvádí ceny zboží v obchodech O_1, O_2 . Pomocí výpočtu součinu matic určete, který obchod bude pro kterého spotřebitele výhodnější, pokud

- uvažujeme tabulky

Tabulka T_1 . Požadované množství zboží

	z_1	z_2	z_3	z_4
A	2	5	4	1
B	3	0	2	2

Tabulka T_2 . Ceny v obchodech O_1 a O_2

	O_1	O_2
z_1	2,00	1,00
z_2	2,00	2,00
z_3	5,00	4,00
z_4	6,00	7,00

- uvažujeme tabulky

Tab. T_1 . Požadované množství zboží

	z_1	z_2	z_3	z_4
A	3	2	1	1
B	2	5	1	2

Tab. T_2 Ceny v obchodech O_1 a O_2

	O_1	O_2
z_1	20	21
z_2	22	21
z_3	45	41
z_4	10	11

2. Ekonomika malého státu produkuje dva statky a, b . Na výrobu jedné tuny a je třeba 0,5 t a a 0,5 t b , na výrobu jedné tuny b je třeba 0,1 t a . Pomocí inverzní matice (jako v příkladu 3.) určete, kolik je třeba produkovat ročně statku a a b , pokud je roční spotřeba

- a) 9 t statku a a 18 t statku b ,
- b) 9 t statku a a 4,5 t statku b ?

Výsledky

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 35 \\ 17 & 25 \end{pmatrix}$, pro A je výhodnější nákup v O_2 , pro B nákup v O_1 ,

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 22 & 21 \\ 45 & 41 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159 & 157 \\ 215 & 210 \end{pmatrix}$, pro oba nakupující je výhodnější nákup v O_2 .

2. a) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 216 \\ 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}$, v 24 t statku a , 30 t statku b ,

b) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 189 \\ 135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix}$, 21 t statku a , 15 t statku b .

5. Determinanty

Determinant je reálné číslo, které je **jednoznačně** přiřazeno každé **čtvercové** matici (pro matice, které nejsou čtvercové, se determinant nedefinuje).

Determinant čtvercové matice A řádu $n \times n$ (pro $n \in \mathbb{N}$) se značí $\det A$ nebo se zapisuje ve tvaru

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Pozor – tento zápis je nutné odlišovat od zápisu matice, kde používáme jiné typy závorek:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Determinant druhého řádu je definován vztahem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(determinant druhého řádu lze vypočítat tak, že od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále).

Determinant třetího řádu je definován vztahem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

(determinant třetího řádu lze vypočítat tak, že od tří sčítanců, které získáme naznačeným způsobem jako součiny prvků „ve směru hlavní diagonály a jejich rovnoběžek“, odečteme další tři členy, které určíme stejným způsobem jako součiny prvků „ve směru vedlejší diagonály a jejich rovnoběžek“).

Příklad 1

Vypočítejte determinanty $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

Řešení

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) = 12 + 10 = 22,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 - (6 \cdot 2 \cdot 9 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 5 \cdot 1) = 398.$$

Determinant vyššího řádu ($n \times n, n \geq 3$) lze definovat rekurentně (tzv. **Rozvoj determinantu**):

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n} \det A_{1n},$$

kde $\det A_{1j}$ je determinant matice, který vznikne vynecháním prvního řádku a j -tého sloupce matice A .

Také platí, že místo prvního řádku můžeme vzít libovolný jiný řádek a výsledek bude stejný:

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det A_{in},$$

kde $\det A_{ij}$ je determinant matice, který vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce matice A .

Příklad 2

Vypočtěte determinant čtvrtého řádu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Řešení

Determinant budeme počítat pomocí věty o rozvoji determinantu. Nejvýhodnější zřejmě bude rozvinout determinant podle druhého sloupce, který obsahuje nejvíce nul, tedy vypadne hodně členů (vynecháme 3. řádek a 2. sloupec):

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 & 5 \\ -1 & \mathbf{0} & 4 & 0 \\ 3 & \mathbf{2} & 0 & 4 \\ 1 & \mathbf{0} & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot (16 - 15 + 0 - 20 + 4) = \\ = (-2) \cdot (-15) = 30.$$

Tento výpočet můžeme ověřit výpočtem na grafickém kalkulátoru.

Poznámka: Stejným způsobem se dají počítat determinanty vyšších řádů.

Vlastnosti determinantů

Platí následující věty

1. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na její hlavní diagonále.*
2. *Záměnou pořadí dvou řádků matice se změní znaménko determinantu.*
3. *Vynásobením nějakého řádku matice nenulovým číslem k se determinant k -krát vynásobí.*
4. *Přičtením násobku řádku k jinému řádku se determinant nezmění.*

Totéž platí pro sloupce matice (platí totiž, že $\det A = \det A^T$).

5. Pro A, B čtvercové matice typu $n \times n$: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$,
6. Pro A čtvercovou matici typu $n \times n$: $\det A = \det A^T$,
7. Pro A regulární matici: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Dané věty lze využít při výpočtu determinantu. Důkazy těchto vět jsou v literatuře [BHN].

Příklad 3

Vypočtěte determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Řešení

Všechny tři determinanty řešíme pomocí 1. věty:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 = -30; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cvičení

1. Vypočítejte následující determinanty, výsledek ověřte na grafickém kalkulátoru:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{e)} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} & \text{h)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{i)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} & & & \end{array}$$

2. Vypočítejte následující determinanty, výsledek ověřte na grafickém kalkulátoru:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & -7 \\ -3 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & -7 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{d)} \begin{vmatrix} 1 + \cos x & 1 + \sin x & 1 \\ 1 - \sin x & 1 + \cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \end{array}$$

3. Vypočítejte následující determinanty, výsledek ověřte na grafickém kalkulátoru:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Vypočítejte rozvojem dle zvoleného řádku nebo sloupce následující determinanty:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Řešte rovnici s determinantem:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & x & 3 \\ x & 4 & x \end{vmatrix} = 6.$$

6. Nalezněte kořeny polynomu:

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

7. Vypočítejte:

$$|1| + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

8. Řešte rovnici s determinantem:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Určete, pro která x je $\det A < 0$, je-li:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Vypočítejte rozvojem dle zvoleného řádku nebo sloupce následující determinanty:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Výsledky:

1. a) 5
- b) 12
- c) -6
- d) 15
- e) 1
- f) -9
- g) 0
- h) 47
- i) -144

3. a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) -10

5. $x = -2$

7. 7

9. $x \in (-1; 0)$

2. a) 8
- b) 2
- c) -3
- d) 1
- e) -5

4. a) 70
- b) 24
- c) -153

6. $x = 0 \vee x = 1$

8. $x = 2 \vee x = 3$

10. a) 28
- b) -252

Řešení soustavy lineárních rovnic užitím determinantu

Je-li matice soustavy lineárních rovnic regulární (tj. $\det A \neq 0$), má tato soustava právě jedno řešení a toto řešení lze získat tzv. **Cramerovým pravidlem**. Označme A_i matici, která vznikne z matice A (z matice soustavy) nahrazením i -tého sloupce sloupcem pravé strany (označeným vektorem \vec{b} , představíme-li si soustavu jako maticovou rovnici $AX = \vec{b}$). Pak lze

i -tou neznámou x_i vypočítat podle vzorce: $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.

Poznámka: Všimněte si, že Cramerovo pravidlo je použitelné skutečně jen pro soustavy s regulární maticí, neboť jmenovatel výše uvedeného vzorce je nenulový právě jen pro regulární matici. Řešit celou soustavu Cramerovým pravidlem je pracné, avšak Cramerovo pravidlo umožňuje vypočítat třeba jen jednu neznámou ze soustavy. Též je použitelné tehdy, pokud se nemění matice soustavy, ale mění se pouze vektor pravé strany.

Příklad 1

Vypočtete Cramerovým pravidlem neznámé ze soustavy

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6.$$

Řešení

Nejprve spočítáme determinant matice soustavy například Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Determinant je nenulový, tj. matice soustavy je regulární a můžeme v Cramerově pravidle pokračovat a určit $\det A_1$, $\det A_2$, $\det A_3$.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -28; \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -56.$$

Určíme neznámé dosazením do vzorce $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, tj.

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-28}{-28} = 1; \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{-28} = 0; \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-56}{-28} = 2.$$

Cvičení

1. Cramerovým pravidlem vypočítejte x_2 ze soustavy:

$$2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 - 3x_3 = 1$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_4 = 3$$

$$3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0.$$

2. Cramerovým pravidlem vypočítejte x_1 ze soustavy:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$$

$$3x_1 - 4x_3 - x_4 = -2$$

$$-2x_2 + x_2 + x_4 = 4.$$

3. Vypočtete Cramerovým pravidlem neznámé ze soustavy

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

4. Vypočtete Cramerovým pravidlem neznámé ze soustavy

$$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$7x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -1$$

$$6x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 1.$$

5. Vypočtete Cramerovým pravidlem neznámé ze soustavy

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21.$$

Výsledky

1. $x_2 = \frac{-74}{-10} = \frac{37}{5}$

2. $x_1 = \frac{-100}{72} = \frac{-25}{18}$

3. $x_1 = -3, x_1 = -9, x_1 = -8$

4. $x_1 = 3, x_1 = -1, x_1 = 6$

5. $x_1 = -\frac{9}{7}, x_1 = -\frac{1}{7}, x_1 = 4$

Aplikační příklady z praxe IV (využití determinantů)

Příklad 1

Na trhu dvou druhů zboží z_1 a z_2 je nabídka (q_{1s} pro z_1 , q_{2s} pro z_2) a poptávka (q_{1d} pro z_1 , q_{2d} pro z_2) popsána vztahy:

$$q_{1s} = -1 + p_1, q_{1d} = 31 - 2p_1 - p_2,$$

$$q_{2s} = p_2, q_{2d} = 40 - 2p_2 - p_1,$$

kde p_1 , resp. p_2 je cena za jednotku zboží z_1 , resp. z_2 . Cramerovým pravidlem určíme rovnovážné ceny p_1, p_2 .

Vydeme z rovnosti množství nabízeného a poptávaného zboží z_1 a z_2 a vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$q_{1s} = q_{1d} \Leftrightarrow -1 + p_1 = 31 - 2p_1 - p_2 \Leftrightarrow 3p_1 + p_2 = 32,$$

$$q_{2s} = q_{2d} \Leftrightarrow p_2 = 40 - 2p_2 - p_1 \Leftrightarrow p_1 + 3p_2 = 40.$$

Vypočteme příslušné determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8, |A_1| = \begin{vmatrix} 32 & 1 \\ 40 & 3 \end{vmatrix} = 96 - 40 = 56, |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 32 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = 120 - 32 = 88.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme: $p_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{56}{8} = 7, p_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{88}{8} = 11.$

Rovnovážné ceny jsou $p_1 = 7$ Kč/ks, $p_2 = 11$ Kč/ks.

Příklad 2

Předpokládejme, že k výrobě 1 tuny plodiny na farmě, která produkuje jednu plodinu a hnojivo, je třeba 0,2 t téže plodiny a 0,2 t hnojiva, zatímco k produkci 1 t hnojiva je potřeba 0,4 t plodiny. Cramerovým pravidlem určíme, kolik tun plodiny a hnojiva musí farma každoročně produkovat, potřebuje-li pro vlastní spotřebu (či prodej) každoročně 10,4 tun plodiny 1 t hnojiva.

Označme p množství vyprodukované plodiny a h množství hnojiva. Na produkci p plodiny potřebujeme $0,2p$ plodiny a $0,2p$ hnojiva, na h hnojiva potřebujeme $0,4h$ plodiny. Je tedy potřeba vyprodukovat $p = 8 + 0,2p + 0,4h$ plodiny a $h = 1 + 0,2p$ hnojiva. Budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. (po úpravě):

$$0,8p - 0,4h = 10,4,$$

$$-0,2p + h = 1.$$

Vypočteme příslušné determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,2 & 1 \end{vmatrix} = 0,72, |A_1| = \begin{vmatrix} 10,4 & -0,4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10,8, |A_2| = \begin{vmatrix} 0,8 & 10,4 \\ -0,2 & 1 \end{vmatrix} = 2,88.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme: $p = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{10,8}{0,72} = 15$, $h = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2,88}{0,72} = 4$.

Je potřeba 15 t plodiny a 4 t hnojiva.

Příklad 3

Americká firma, která měla zisk 200 000 \$ před zdaněním, se rozhodla věnovat 2 % ze zisku po zdanění na charitativní účely. Musí zaplatit státní daň 5 % ze zisku (po zaplacení charitě) a federální daň 40 % (po zaplacení charitě a státní daně). Cramerovým pravidlem určíme, kolik věnuje na charitu.

Označme x_1 obnos určený charitě, x_2 státní daň, x_3 federální daň.

Pro obnos na charitu platí: $x_1 = 0,02(200000 - (x_2 + x_3))$, neboli $x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 = 4000$.

Pro státní daň platí: $x_2 = 0,05(200000 - x_1)$, neboli $0,05x_1 + x_2 = 10000$.

Pro federální daň platí: $x_3 = 0,40(200000 - (x_1 + x_2))$, neboli $0,4x_1 + 0,4x_2 + x_3 = 80000$.

Z daných vztahů sestavíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 &= 4000, \\ 0,05x_1 + x_2 &= 10000, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + x_3 &= 80000. \end{aligned}$$

Vypočteme příslušné determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0,02 & 0,02 \\ 0,05 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 1 \end{vmatrix} = 0,9914, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4000 & 0,02 & 0,02 \\ 10000 & 1 & 0 \\ 80000 & 0,4 & 1 \end{vmatrix} = 2280.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2280}{0,9914}$. Přibližná hodnota je $x_1 = 2\,300$ \$, což je částka, kterou odevzdá firma na charitu.

Příklad 4

Cramerovým pravidlem určíme rovnovážnou úrokovou sazbu, je-li křivka IS dána předpisem $i = 10 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -8 + 4Y$, i je udávána v %, Y v miliardách \$.

Po úpravě řešíme soustavu lineárních rovnic: $i + 2Y = 10$,

$$i - 4Y = -8.$$

Vypočteme příslušné determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6, |A_1| = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = -24, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -18.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme: $i = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-24}{-6} = 4, Y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-18}{-6} = 3.$

Rovnovážná úroková sazba je $i = 4 \%$, úroveň důchodu je $Y = 3$ miliardy \$.

Cvičení

- Cramerovým pravidlem určete rovnovážné ceny na trhu více statků, je-li (ceny p_i jsou v Kč/ks, množství q_{id}, q_{is} v kusech, $i = 1, 2, 3$)
 - pro první statek poptávka dána funkcí $q_{1d} = 100 - 5p_1 + 3p_2$, nabídka dána funkcí $q_{1s} = 2p_1 - 10$, pro druhý statek poptávka dána funkcí $q_{2d} = 120 - 8p_2 + 2p_1$, nabídka dána funkcí $q_{2s} = 5p_2 - 20$,
 - pro první statek poptávka dána funkcí $q_{1d} = 20 - p_1 - p_3$, nabídka dána funkcí $q_{1s} = p_1 - 10$, pro druhý statek poptávka dána funkcí $q_{2d} = 40 - 2p_2 - p_3$, nabídka dána funkcí $q_{2s} = 2p_2$, pro třetí statek poptávka dána funkcí $q_{3d} = 10 + p_2 - p_3 - p_1$, nabídka dána funkcí $q_{3s} = 3p_3 - 5$.
- Ekonomika malého státu produkuje dva statky a, b . Na výrobu jedné tuny a je třeba 0,5 t a a 0,5 t b , na výrobu jedné tuny b je třeba 0,1 t a . Cramerovým pravidlem určete, kolik je třeba produkovat ročně statku a a b , pokud je roční spotřeba:
 - 9 t statku a a 18 t statku b ,
 - 9 t statku a a 4,5 t statku b .
- Cramerovým pravidlem určete rovnovážnou úrokovou sazbu a úroveň důchodu, je-li
 - křivka IS dána předpisem $i = 7 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -5 + 4Y$,
 - křivka IS dána předpisem $i = 13 - 2Y$ a křivka LM předpisem $i = -11 + 4Y$.

Výsledky

- $p_1 = \frac{1850}{85} = \frac{370}{17}$ Kč/ks, $p_2 = \frac{1200}{85} = \frac{240}{17}$ Kč/ks,
 - $p_1 = \frac{-410}{-30} = \frac{41}{3}$ Kč/ks, $p_2 = \frac{-280}{-30} = \frac{28}{3}$ Kč/ks, $p_3 = \frac{-80}{-30} = \frac{8}{3}$ Kč/ks
- $\frac{10,8}{0,45} = 24$ t statku a , $\frac{13,5}{0,45} = 30$ t statku b ,
 - $\frac{9,45}{0,45} = 21$ t statku a , $\frac{6,75}{0,45} = 15$ t statku b
- $i = \frac{-18}{-6} = 3, Y = \frac{-12}{-6} = 2,$
 - $i = \frac{-30}{-6} = 5, Y = \frac{-24}{-6} = 4$

Literatura

- [BHN] Batíková, B., Henzler, J., Hladíková, H., Nešverová, E., Otavová, M., Sýkorová, I., Ulrychová, E., Valentová, E., *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*, VŠE, Praha, 2009 (vysokoškolská učebnice); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.
- [BHV] Batíková, B., Henzler, J., Hladíková, H., Nešverová, E., Otavová, M., Sýkorová, I., Ulrychová, E., Valentová, E., *Matematika pro 4 MM 101*, VŠE, Praha, 2006 (skriptum); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.
- [BOV] Batíková, B., Otavová, M., Valentová, E., *Matematika v ekonomii*, nakladatelství Oeconomia, Praha, 2011 (skriptum); **ISBN: 80-245-1097-9**.
- [HU] Hušek, R., Pelikán, J., *Aplikovaná ekonometrie. Teorie a praxe*, Professional Publishing, Praha, 2003 (skriptum).
- [KCK] Kaňka, M., Coufal, J., Klůfa, J., *Učebnice matematiky pro ekonomy*, Ekopress, Praha, 2007 (vysokoškolská učebnice); **ISBN: 978-80-86929-24-8**.
- [PHC] Pelikán, J., Henzler, J., Černý, M., *Matematické základy informatiky*, VŠE, Praha, 2011.
- [SB] Simon, C., P., Blume, L., *Mathematics for Economics*, W. W. Norton a Co, New York, Mass. – London, 1994.
- [SO] Soper, J., *Mathematics for Economics and Business*, Oxford, UK, 2004.