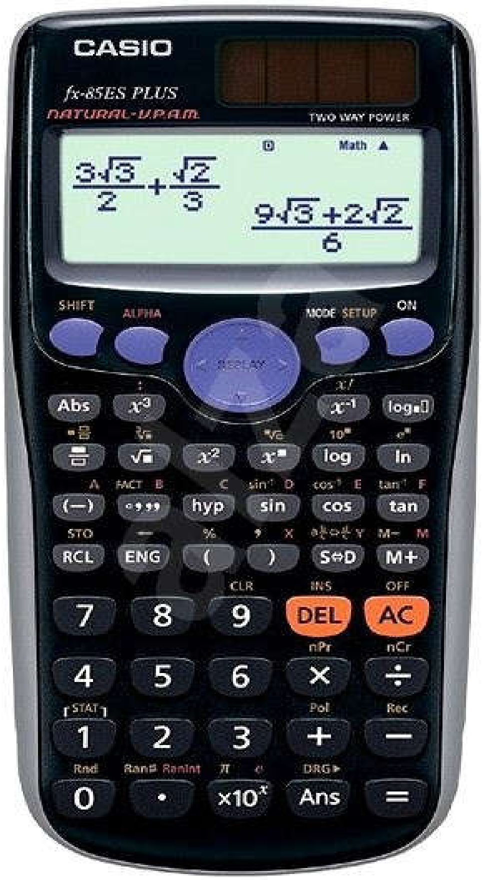
Gymnázium
Botičská

STRUČNÉ OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY V PŘÍKLADECH



RNDr. Milada Rezková
RNDr. Vlasta Sudzinová
Mgr. Eva Valentová
2016

Předmluva

Tento učební text je určen studentům 4. ročníku čtyřletých gymnázií, kteří si chtějí procvičit látku z partií středoškolské matematiky probíranou v průběhu prvních tří let studia na gymnáziu.

Ze všech probíraných partií jsou zvoleny vhodné procvičovací příklady, které se studentům budou hodit nejen při přípravě ke školní či státní maturitě z matematiky, ale i při přijímacích zkouškách na technicky a ekonomicky zaměřené vysoké školy. Tento soubor příkladů se autorky rozhodly sestavit proto, že podobná stručná sbírka zatím mezi učebnicemi chybí.

Publikace je členěna na 12 kapitol. Obsahuje 60 příkladů s výsledky a návody k samostatnému řešení.

Autorky děkují též Ing. Evženu Markalousovi za pomoc s typografií textu a cenné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

Obsah

Výroky a množiny

1. Negujte výroky:
   a) Prší a venku se setmělo.
   b) Nebude-li pršet, nezmoknem.
   c) Nikdo není dokonalý.
   d) Aspoň jeden student z této třídy udělá maturitu.
   e) Přihlášku si podám na nejvýše 3 vysoké školy.

2. Jsou dány množiny $A = \langle -3; 2)$,
   $B = \{x \in \mathbb{R}; |x+2| < 1\}$,
   $C = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$.

   Určete:
   a) $A \cap C$
   b) $A \cup C$
   c) $A \cap B \cap C$
   d) $A \setminus B$
   e) $C \setminus A$
   f) B'_A
   g) A'
   h) C'

Výsledky

1.
   a) Neprší nebo se venku nesetmělo.
   b) Nebude pršet a zmokneme.
   c) Někdo je dokonalý. Aspoň jeden člověk je dokonalý.
   d) Žádný student z této třídy neudělá maturitu.
   e) Přihlášku si podám na alespoň 4 vysoké školy.
2. Množiny jsou definovány: $A = \langle -3;\ 2)$, $B = (-3;\ -1);\ C = \langle 1; \infty)$.
   a) $A \cap C = \langle 1;\ 2)$
   b) $A \cup C = \langle -3;\ \infty)$
   c) $A \cap B \cap C = \emptyset$
   d) $A \setminus B = \{-3\} \cup \langle -1;\ 2)$

e) $C \setminus A = \langle 2;\ \infty)$

f) $B_A^{'} = \{-3\} \cup \langle -1;\ 2)$

g) $A^{'} = (-\infty;\ -3) \cup \langle 2;\ \infty)$

h) $C^{'} = (-\infty;\ 1)$

Výrazy

3. Dělte mnohočleny a udejte podmínky, za nichž má dělení smysl:
   $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7)$

4. Rozložte na součin:
   a) $3ab^3 + 6ab^2 + 3ab$
   b) $8a^3 + b^3$
   c) $9x^2 + 6x - 4a^2 + 1$
   d) $256 - y^4$
   e) $x^2 + 11x + 24$
   f) $x^2 + 2x - 15$

5. Vypočtěte a udejte podmínky, za nichž mají výrazy smysl:
   a) $(a^n - a^{2n})^3$
   b) $\frac{3a+b}{a-b} - \frac{4b}{b-a}$
   c) $\frac{a^2b-4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2-2ab}$
   d) $\frac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}$

6. Vypočtěte:
   a) $\frac{24^2 \cdot (-27)^2}{(-12)^3 \cdot 18^2}$
   b) $\left[6 - 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^0\right]^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4}$
   c) $\sqrt[4]{20} \cdot \sqrt[4]{0{,}8}$

7. Usměrněte zlomky:
   a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$
   b) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

8. Částečně odmocněte $3\sqrt{54} - 7\sqrt{24}$.

9. Zjednodušte $\sqrt{\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}}$ a stanovte podmínky, za nichž má výraz smysl. Výsledný výraz zapište též jako mocninu.

10. Zjednodušte výrazy a udejte podmínky, za nichž mají smysl:

a) $\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{5}}$

b) $\frac{x^2y}{z^4t^3} : \frac{y^2z}{x^3t^2}$

11. Vypočtěte a v případě potřeby stanovte podmínky pro proměnné:

a) $\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$

b) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

c) $\binom{121}{119}$

d) $\binom{15}{3} + \binom{8}{5} - \binom{15}{12}$

e) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10}$

12. Rozviňte užitím binomické věty $(2a^3 - 5)^4$.

Výsledky

3. $x - 1; x \neq 7$

4.

a) $3ab(b^2 + 2b + 1) = 3ab\,(b + 1)^2$

b) $(2a + b)\,(4a^2 - 2ab + b^2)$

c) $(9x^2 + 6x + 1) - 4a^2 = (3x + 1)^2 - 4a^2 = (3x + 1 + 2a)(3x + 1 - 2a)$

d) $4^4 - y^4 = (4^2 - y^2)(4^2 + y^2) = (4 - y)(4 + y)(16 + y^2)$

e) $(x + 8)(x + 3)$

f) $(x + 5)(x - 3)$

5.

a) $a^{3n} - 3a^{2n} \cdot a^{2n} + 3a^n \cdot a^{4n} - a^{6n} = a^{3n} - 3a^{4n} + 3a^{5n} - a^{6n}$;

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$,

b) $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$

c) $\frac{3a+b+4b}{a-b} = \frac{3a+5b}{a-b},\ a \neq b$

d) $\frac{a^2b-4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2-2ab} = \frac{a+2b}{3},\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 2b$

e) $\frac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1} = y - 1,\ y \neq 0 \wedge y \neq -1$

6.

a) $\frac{24^2\cdot(-27)^2}{(-12)^3\cdot 18^2} = -\frac{3}{4}$

b) $\left[6 - 4\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^0\right]^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4} = 1$

c) $\sqrt[4]{20}\cdot\sqrt[4]{0{,}8} = \sqrt[4]{16} = 2$

7.

a) $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

b) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$

8. $-5\sqrt{6}$

9. $\sqrt{\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}} = a^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{12}}, \quad a > 0 \wedge \ b > 0$

10.

a) $\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{a^{11}},\ a > 0$

b) $\frac{x^5}{yz^5t},\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge t \neq 0$

11.

a) $\frac{1}{8}$

b) $4n^2 + 2n\,;\ \ n \in \mathbb{N}$

c) $\binom{121}{119} = \binom{121}{2} = \frac{121\cdot 120}{2} = 7260$

d) $\binom{15}{3} + \binom{8}{5} - \binom{15}{12} = \binom{15}{3} + \binom{8}{5} - \binom{15}{3} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

e) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10} = \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = \binom{14}{3} = 364$

12.

$$(2a^3)^4 - \binom{4}{1}(2a^3)^3\cdot 5 + \binom{4}{2}(2a^3)^2\cdot 5^2 - \binom{4}{3}(2a^3)^1\cdot 5^3 + 5^4 =$$

$$= 16a^{12} - 160a^9 + 600a^6 - 1000a^3 + 625$$

Rovnice a nerovnice

13. Řešte rovnice:

a) $x - 4[x - 2(x + 6)] = 5x + 3$

b) $\frac{6+25x}{15} - (x - 1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$

c) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$

d) $3 + x = 1 + \frac{4}{2-x}$

e) $8x - x^2 = 14$

f) $|x + 4| = \frac{1}{4}$

g) $2|x - 5| = x$

h) $\sqrt{7 - x} = x - 1$

i) $\frac{x-5}{10-2x} = 0$

14. Řešte soustavu rovnic:

$x + y - z = 11$

$x - y + z = 1$

$y + z - x = 5$

15. Řešte nerovnice:

a) $x^2 + 16 > (x + 4)^2$

b) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

c) $\frac{1}{x^2} \geq 1$

d) $\frac{2x-3}{3x-7} > 0$

e) $\frac{(3x-1)^2}{x+4} \leq 0$

f) $|x + 2| < 8$

g) $|2x + 3| \geq 9$

h) $|1 + 2x| > 0$

i) $|3 - 5x| < -1$

j) $|2 + x| \geq -2$

16. Řešte exponenciální rovnice:

a) $4 \cdot 2^{x^2} = 2^{3x}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{7x-2}$

c) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

d) $3^{2x} - 3^{x} = 702$

e) $3^{x} + 2 = 3^{x+2}$

17. Řešte logaritmické rovnice:

a) $2\log(\mathrm{x}-2) = \log(14-\mathrm{x})$

b) $\log \mathrm{x} + \frac{1}{\log \mathrm{x}} = 2$

c) $\log_3 \mathrm{x}^2 + \log_3 \mathrm{x}^3 = -5$

d) $\log(\mathrm{x}-3) - \log(2-3\mathrm{x}) = 1$

e) $\log_2 \sqrt{\mathrm{x}} + \log_2 \frac{1}{\mathrm{x}} = 2$

f) $\mathrm{x}^{\log \mathrm{x}} = 1000\mathrm{x}^2$

18. Vypočtěte x:

a) $\log_{0,2} 25 = x$

b) $\log_{\frac{1}{100}} x = -3$

c) $\log_{x} 16 = 4$

Výsledky

13.

a) $K = \emptyset$

b) $K = \mathbb{R}$

c) $K = \{-1\},\ x \neq \pm\frac{1}{3}$

d) $K = \{0\},\ x \neq 2$

e) $K = \left\{4+\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right\}$

f) $K = \left\{-\frac{17}{4}; -\frac{15}{4}\right\}$

g) $K = \left\{\frac{10}{3}; 10\right\}$

h) $K = \{3\}$; druhé řešení $x = -2$ nevyhovuje zkoušce

i) $K = \emptyset$; řešení $x = 5$ nevyhovuje podmínkám

14. $K = \{[6;\ 8;\ 3]\}$

15.

a) $K = (-\infty; 0)$

b) $K = (-\infty; -2\rangle \cup \langle -1;\ \infty)$

c) $K = \langle -1; 1\rangle \setminus \{0\}$

d) $K = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; \infty\right)$

e) $K = (-\infty; -4) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

f) $K = (-10; 6)$

g) $K = (-\infty; -6\rangle \cup \langle 3;\ \infty)$

h) $K = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

i) $K = \emptyset$

j) $K = \mathbb{R}$

16.

a) $K = \{1; 2\}$

b) $K = \left\{\frac{9}{10}\right\}$

c) $K = \{1\}$

d) substituce $a = 3^x$; $K = \{3\}$

e) $K = \left\{\log_3 \frac{1}{4}\right\}$

17.

a) $K = \{5\}$; -2 nevyhovuje

b) substituce $\log x = a$; $K = \{10\}$

c) $K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

d) $\mathcal{D}_f = \emptyset \Rightarrow K = \emptyset$

e) $K = \left\{\frac{1}{16}\right\}$

f) $K = \left\{1000; \frac{1}{10}\right\}$

18.

a) $x = -2$

b) $x = 10^6$

c) $x = 2$

Funkce

19. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \sqrt{\frac{2-4x}{3}}$

b) $y = \log \frac{3x-6}{5}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$

d) $y = \log_{0,5}(4x - x^2)$

e) $y = \ln(x^2 - 10)$

f) $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}}$

20. Je dána funkce $f: y = \frac{x-2}{x-3}$. Určete její definiční obor, vypočtěte $f(5)$ a zjistěte, zda číslo 1 patří do oboru hodnot této funkce.

21. Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = -3x + 1$

b) $y = |x| - 1$

c) $y = x^2 + 2x + 2$

d) $y = \frac{x-1}{x}$

e) $y = -2x^4 + 1$

f) $y = 4^{x+1}$

g) $y = \log(x - 3)$

h) $y = \sin 2x$

22. Zapište předpis pro funkci, která je inverzní k funkci $y = 2x^3$.

23. Je dána funkce $y = \left|\frac{1}{x+1} + 1\right|$. Načrtněte její graf, využijte přitom průsečíků se souřadnicovými osami. Rozhodněte, zda je tato funkce prostá, sudá, lichá, omezená. Určete intervaly monotónnosti této funkce a její extrémy.

Výsledky

19.

a) $K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$

b) $K = (2; \infty)$

c) $K = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

d) $K = (0; 4)$

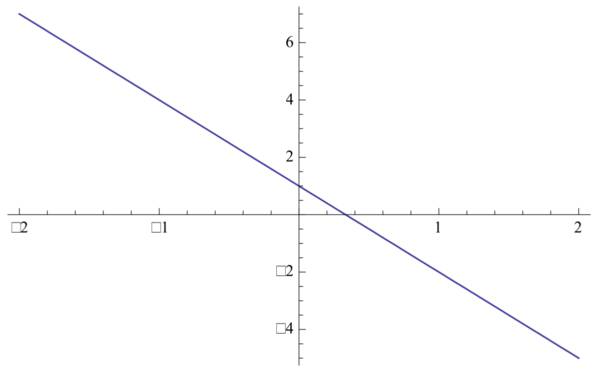
e) $K = \left(-\infty; -\sqrt{10}\right) \cup \left(\sqrt{10}; \infty\right)$

f) $K = \langle 1;\ 2)$

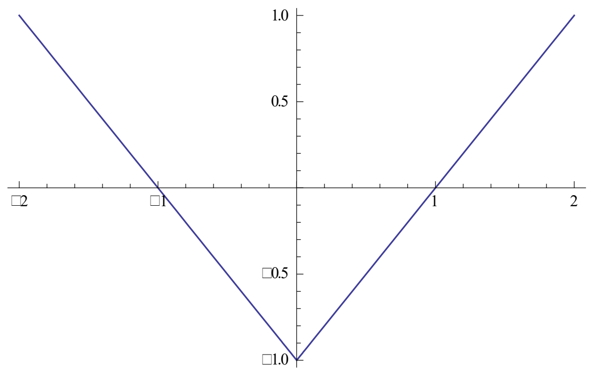
20. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}; f(5) = \frac{3}{2}; 1 \notin \mathcal{H}_f$

21.

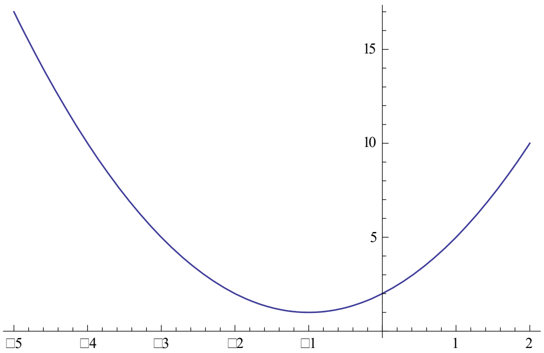
a)



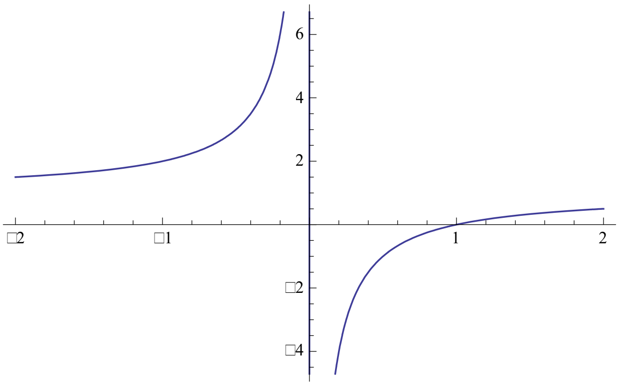
b)



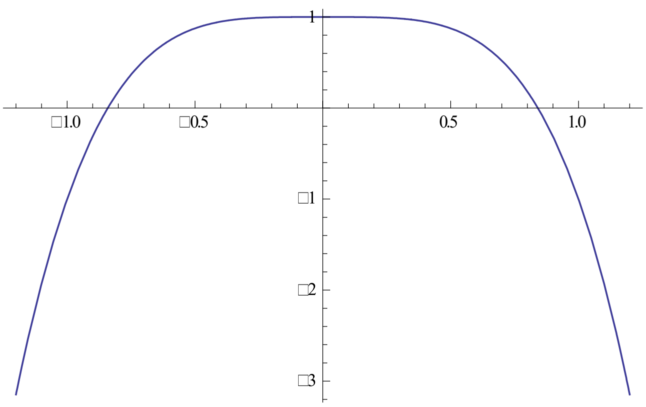
c) $y = (x+1)^2 + 1; V = [-1; 1]$



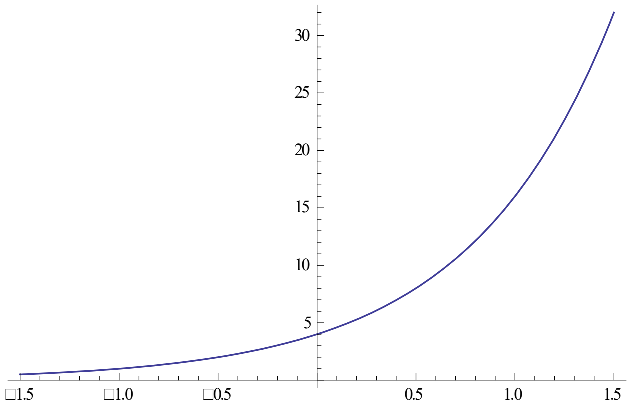
d) $y = 1 - \frac{1}{x}$



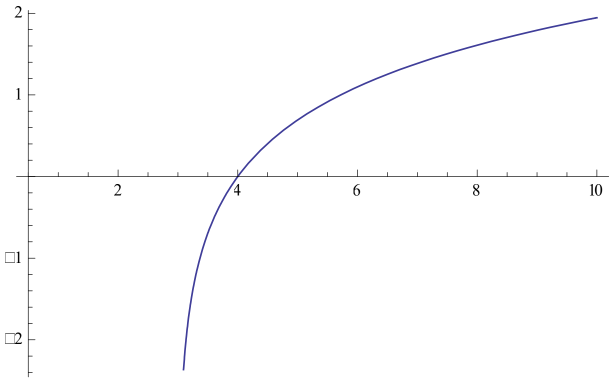
e) průsečíky s osou x: $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$



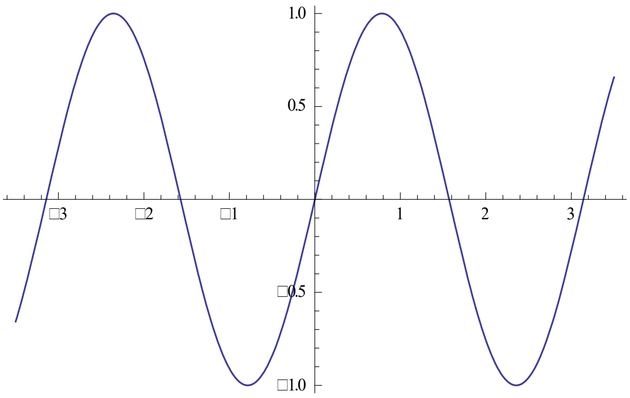
f) průsečíky s osou y: $y = 4$



g) průsečíky s osou x: $x = 4$; asymptota: $x = 3$; $x > 3$

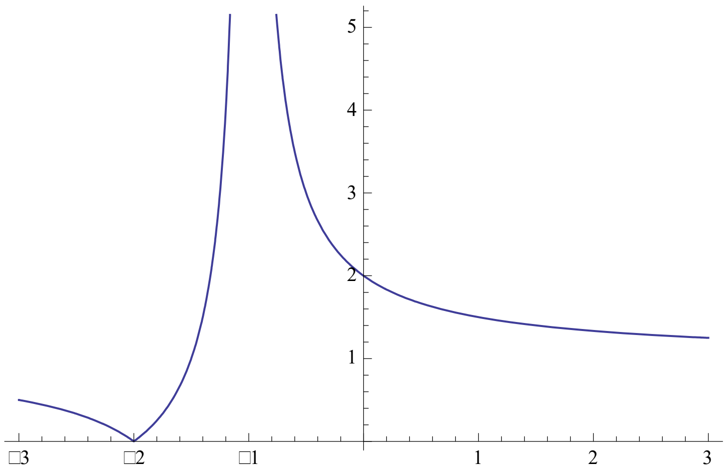


h) průsečíky s osou x: $x = \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$



22. $f^{-1}: y = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$; $x \in \mathbb{R}$

23. Funkce není prostá, není sudá ani lichá, zdola omezená 0, shora neomezená; $P_x = [-2; 0]$ a $P_y = [0; 2]$;
klesající na intervalech $(-\infty; -2)$ $a(-1; \infty)$; rostoucí na intervalu $(-2; -1)$; má minimum v bodě $[-2; 0]$, nemá maximum.



asymptoty: $x = -1$; $y = 1$.

Posloupnosti

24. Jsou dány první dva členy posloupnosti $a_1 = 2, a_2 = 1$. Tato posloupnost je
    a) aritmetická,
    b) geometrická.

    Zapište ji vzorcem pro n-tý člen, rekurentně; určete její osmý člen; sečtěte prvních 10 členů této posloupnosti. Určete, zda je posloupnost omezená a monotónní a zda má limitu.

25. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří 3 po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Určete délky zbývajících stran.

26. Stroj ztrácí každý rok 10 % své hodnoty. Jaká byla jeho nákupní hodnota, jestliže po třinácti letech měl hodnotu 10 168 Kč?

Výsledky

24.

a) aritmetická posloupnost $a_1 = 2;\ a_2 = 1;\ a_3 = 0;\ a_4 = -1$*; ..., d = -1*

vzorec pro $n -$ *tý člen*: $a_n = 3 - n$

rekurentní vzorec: $a_{n+1} = a_n - 1;\ a_1 = 2$

$a_8 = -5$; posloupnost je klesající, shora omezená $H = 2$, zdola neomezená;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Součet prvních 10 členů této posloupnosti: $s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = -25$.

b) geometrická posloupnost $a_1 = 2;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{1}{4}$; ..., $q = \frac{1}{2}$

vzorec pro $n -$ *tý člen* $a_n = 2^{2-n}$

rekurentní vzorec : $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n;\ a_1 = 2$

$a_8 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$; posloupnost je klesající, shora omezená $H = 2$, zdola omezená $d = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Součet prvních 10 členů této posloupnosti: $s_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} =$

$$= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] = \frac{1023}{256}.$$

25. Označíme délky stran jako tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti $a = 24 - d;\ b = 24;\ \ c = 24 + d$. Použijeme Pythagorovu větu $(24 - d)^2 + 24^2 = (24 + d)^2\ a\ dostaneme\ d = 6$.

    Velikosti stran trojúhelníka jsou: 18 cm, 24 cm, 30 cm.

26. Označíme-li nákupní hodnotu stroje jako K_0 ,

    po prvním roce má stroj hodnotu $K_1 = 0{,}9K_0$,

    po druhém roce má stroj hodnotu $K_2 = 0{,}9K_1 = 0{,}9^2K_0$,

    po n-tém roce má stroj hodnotu $K_n = 0{,}9K_{n-1} = 0{,}9^nK_0$,

    po třináctém roce má stroj hodnotu $K_{13} = 0{,}9K_{12} = 0{,}9^{13}K_0$.

    Tedy $0{,}9^{13}K_0 = 10168 \Rightarrow\ K_0 = \frac{10168}{0{,}9^{13}} \doteq 40\,002$ Kč.

Goniometrie

27. Vypočtěte bez kalkulačky:
    a) $\sin 75°$
    b) $\cos 29° \cos 16° - \sin 29° \sin 16°$
    c) $\sin 75° + \sin 15°$

28. Vyjádřete jako součin:
    a) $1 + \cos x$
    b) $\sin x + \operatorname{tg} x$

29. Určete hodnotu výrazu (bez kalkulačky):
    a) $\frac{\sin 50° \cdot \operatorname{tg} 135° \cdot \operatorname{cotg} 330°}{\cos 225° \cdot \cos 40°}$
    b) $\sin \frac{2}{3}\pi + \operatorname{tg} \frac{7}{4}\pi + \frac{3}{2} \operatorname{cotg} \frac{5}{3}\pi$

30. Určete $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, víte-li, že $\sin x = \frac{3}{5}$ a $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

31. Zjednodušte a udejte podmínky, za nichž má výraz smysl:
    a) $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$
    b) $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$
    c) $\sin x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
    d) $\frac{\sin x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \sin 2x}$

32. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice a zapište také řešení na intervalu $\langle -2\pi; \pi \rangle$:
    a) $\sin x = -\frac{1}{2}$
    b) $\operatorname{tg} 3x = -1$
    c) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
    d) $2 \cdot \sin^2 x - \sin x = 0$
    e) $\operatorname{cotg}^3 \mathrm{x} = \operatorname{cotg} x$
    f) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$
    g) $\sin x = \cos x$

Výsledky

27.

a) $\sin 75° = sin(30° + 45°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ nebo

$$sin\frac{150°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 150°}{1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b) $\cos 29° \cos 16° - \sin 29° \sin 16° = \cos(29° + 16°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin 75° + \sin 15° = 2 \cdot sin\frac{75°+15°}{2} cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45° \cos 30° = \frac{\sqrt{6}}{2}$

28.

a) $1 + \cos x = 1 + \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 1 + cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = 2 \cdot cos^2\frac{x}{2}$

b) $\sin x + tg\ x = \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x\,(\cos x+1)}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x+1}{1} =$

$= tg\ x \cdot 2 \cdot cos^2\frac{x}{2} = 2\ tg\ x\ cos^2\frac{x}{2};\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

29.

a) $-\sqrt{6}$

b) -1

30. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$

31.

a) $\cos x; x \in \mathbb{R}$

b) $\operatorname{cotg}^2 x;\quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $2\sin x;\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x;\quad x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

32.

a) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ $K_{\langle -2\pi;\pi\rangle} = \left\{\frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{6}\right\}$

b) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right\}; K_{\langle -2\pi;\pi\rangle} = \left\{\frac{-7\pi}{4}; \frac{-17\pi}{12}; \frac{-13\pi}{12}; \frac{-3\pi}{4}; \frac{-5\pi}{12}; \frac{-\pi}{12}; \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\}$

c) $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{8} + k\pi\right\}; K_{\langle -2\pi;\pi\rangle} = \left\{\frac{-11\pi}{8}; \frac{-3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right\}$

d) $K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}; K_{\langle -2\pi; \pi \rangle} = \left\{ -2\pi; \frac{-11\pi}{6}; \frac{-7\pi}{6}; -\pi; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \pi \right\}$

e) $K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}; K_{\langle -2\pi; \pi \rangle} = \left\{ \frac{-7\pi}{4}; \frac{-3\pi}{2}; \frac{-5\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}; \frac{-\pi}{2}; \frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

f) $K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}; K_{\langle -2\pi; \pi \rangle} = \left\{ \frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{6} \right\}$

g) $K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}; K_{\langle -2\pi; \pi \rangle} = \left\{ \frac{-7\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$

Kombinatorika a pravděpodobnost

33. Kolik různých čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9,
    a) můžeme-li každou číslici v zápisu čísla použít nejvýše jednou,
    b) mohou-li se číslice v zápisu čísla libovolně opakovat?

34. Kolika různými způsoby můžeme srovnat v krabičce
    a) 10 pastelek různých barev,
    b) 1 žlutou, 2 zelené, 3 červené a 4 modré pastelky, jsou-li pastelky téže barvy navzájem nerozlišitelné?

35. V obchodě mají 5 druhů pohledů v dostatečném množství. Kolika různými způsoby můžeme koupit
    a) 3 různé pohledy,
    b) 3 pohledy?

36. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami (bílou a černou) padne:
    a) na bílé kostce číslo 3,
    b) alespoň na jedné z nich číslo 3,
    c) právě na jedné z nich číslo 3,
    d) na bílé i na černé číslo 3,
    e) nejvýše na jedné z nich číslo 3,
    f) na bílé nebo na černé číslo 3.

Výsledky

33.

a) $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ (variace)

b) $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058$ (variace s opakováním)

34.

a) $10! = 3\,628\,800$ (permutace)

b) $\frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12600$ (permutace s opakováním)

35.

a) $C_3(5) = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ (kombinace)

b) $C_{3}'(5) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ (kombinace s opakováním)

36.

a) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b) \cdot \mathcal{P}(č) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$

b) jev opačný – na žádné kostce nepadne 3: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathrm{b}) \cdot \mathcal{P}(č) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

výsledná pravděpodobnost: $\mathcal{P} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

c) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b) + \mathcal{P}(č) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$

d) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b) \cdot \mathcal{P}(č) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

e) jev opačný – na obou kostkách padne 3: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(b) \cdot \mathcal{P}(č) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

výsledná pravděpodobnost: $\mathcal{P} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

f) stejně jako v úloze b)

nebo pomocí pravděpodobnosti sjednocení

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(b) + \mathcal{P}(č) - \mathcal{P}(b \cap č) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

nebo pomocí pravděpodobnosti sjednocení disjunktních jevů (jen na bílé, jen na černé, současně na obou padne 3)

$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Vektory

37. Jsou dány vektory $\vec{a} = (2; -1), \vec{b} = (3; 2), \vec{c} = (-3; 3)$. Určete:
    a) velikost vektoru $\vec{c}$,
    b) skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$,
    c) vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$,
    d) odchylku vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$,
    e) vektor kolmý k vektoru $\vec{c}$,
    f) souřadnice vektoru $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

Výsledky

37.

a) $|\vec{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 2 = 4$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = (0 - 0; 0 - 0; 4 + 3) = (0; 0; 7)$

d) $cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \varphi \doteq 60°15'$

e) $(k; k), k \in \mathbb{R}; např. (3; 3)$

f) $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = (-5; -4)$

Analytická geometrie – přímka

38. Jsou dány body $A[0; 1], B[6; 3], C[4; 5]$.
    a) Dokažte, že tvoří trojúhelník.
    b) Určete souřadnice středu úsečky AB.
    c) Zapište parametrické vyjádření přímky AB.
    d) Zapište obecnou rovnici přímky AB.
    e) Zapište směrnicový tvar přímky AB
    f) Vypočtěte vzdálenost bodu C od přímky AB.
    g) Napište rovnici přímky procházející bodem C kolmo k přímce AB.
    h) Napište rovnici přímky procházející bodem C rovnoběžně s přímkou AB.

39. Určete průnik přímky $p: 2x + 5y - 10 = 0$ s úsečkou MN: $M[0; -4], N[5; -3]$.

Výsledky

38.

a) Pokud body A, B, C tvoří trojúhelník, nebudou vektory $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 4)$ lineárně závislé. Zde opravdu není $\overrightarrow{AB}$ násobkem $\overrightarrow{AC}$, takže $\triangle ABC$ existuje.

b) $S_{AB} = \frac{A+B}{2} = [3; 2]$

c) např.: $\begin{cases} x = 0 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$, nebo $\begin{cases} x = 6 + 3s \\ y = 3 + s \end{cases}; s \in \mathbb{R}$

d) $x - 3y + 3 = 0$

(pomocí normálového vektoru $\overrightarrow{n_p} = (2; -6)$ kolmého na směrový vektor přímky $\overrightarrow{s_p} = (6; 2)$)

e) $y = \frac{1}{3}x + 1$

f) $\left|C; \overleftrightarrow{AB}\right| = \frac{|1\cdot4-3\cdot5+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|4-15+3|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

g) obecná rovnice $3x + y - 17 = 0$ nebo parametrické vyjádření:

$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 5 - 6t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

h) obecná rovnice $x - 3y + 11 = 0$ nebo parametrické vyjádření:

$\begin{cases} x = 4 + 6t \\ y = 5 + 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$.

39. Společné body úsečky MN: $\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = -4 + t \end{cases}; t \in \langle 0; 1 \rangle$ a přímky $p: 2x + 5y - 10 = 0$ hledáme řešením soustavy rovnic. Vyřešíme z rovnic parametr $t = 2$, který neleží v intervalu $t \in \langle 0; 1 \rangle$, tj. přímka p a úsečka MN nemají společný bod.

Analytická geometrie – kuželosečky

40. Určete, o jaký útvar v rovině se jedná:
    a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$
    b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$
    c) $x^2 + 2x - 2y + 3 = 0$
    d) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$
    e) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$
    f) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$

41. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[6; 7]$a prochází bodem $A[0; 9]$.

42. Napište rovnici paraboly, která má ohnisko $F[4; 3]$ a řídicí přímku d: $\mathrm{x} = 0$.

43. Napište rovnici elipsy, s jedním ohniskem $F[5; 5]$ a vrcholy $[8; 5]$, $[-2; 5]$.

44. Napište rovnici hyperboly s vrcholy $A[-3; -2]$, $B[7; -2]$a vedlejší poloosou $b = 3$.

45. Určete vzájemnou polohu přímky $3x - y - 5 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 = 25$.

46. Napište rovnici tečny paraboly $y^2 = 4x$ v jejím bodě $T[1; 2]$.

47. Pro která c je přímka $x - y + c = 0$ vnější přímkou hyperboly $x^2 - 4y^2 = 36$?

48. Zapište rovnici tečny elipsy $x^2 + 4y^2 = 16$, víte-li, že její směrnice $k = \frac{2}{3}$.

Výsledky

40.

a) kružnice k: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$

b) prázdná množina, neboť žádný bod $[x; y]$ nesplňuje rovnici:
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -5$

c) parabola P: $(x + 1)^2 = 2(y - 1)$

d) elipsa E: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

e) hyperbola H: $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

f) 2 přímky o rovnicích $3x - 2y + 8 = 0$; $3x + 2y + 4 = 0$

(V rovnici $9(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 0$ rozložíme levou stranu na součin podle vzorce $A^2 - B^2$).

41. k: $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 40$

42. P: $(y-3)^2 = 8(x-2)$

43. E: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{21} = 1$

44. H: $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

45. Přímka je sečnou kružnice, průsečíky jsou: $P_1 = [0; -5]$; $P_2 = [3; 4]$.

46. Tečna $t: yy_0 = 2x + 2x_0$, kde bod dotyku $T = [x_0; y_0] = [1; 2]$, tedy po dosazení $t: y = x + 1$.

47. Řešením soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dostaneme kvadratickou rovnici s parametrem c

$3x^2 + 8cx + 4c^2 + 36 = 0$.

Diskriminant této kvadratické rovnice $D < 0 \Rightarrow 64c^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4c^2 + 36) < 0 \Rightarrow$ $c^2 - 27 < 0 \Rightarrow c \in \left(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$.

48. Řešením soustavy $y = \frac{2}{3}x + q$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ dostaneme kvadratickou rovnici s parametrem q: $x^2 + 4\left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}xq + q^2\right) = 16$. Po úpravě položíme diskriminant této kvadratické rovnice

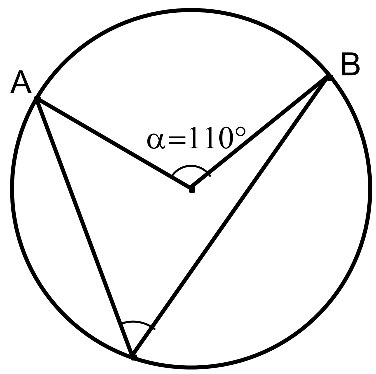
$D = 0 \Rightarrow \frac{256}{q}q^2 - 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot (4q^2 - 16) = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{10}{3}$.

Tedy rovnice tečen k elipse jsou: $t_1: y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$; $t_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$.

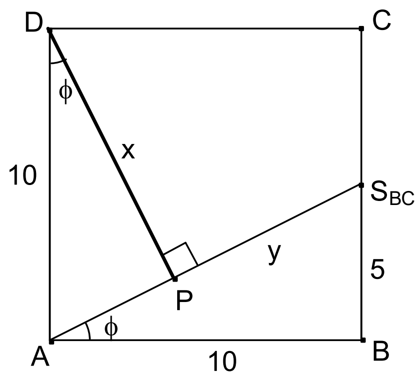
Planimetrie

49. Rozhodněte, zda lze sestrojit trojúhelník se stranami 1 cm, 2 cm a 3 cm. Zdůvodněte.

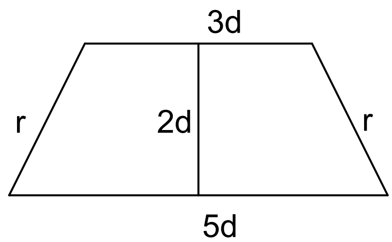
50. V kružnici k přísluší oblouku $\widehat{AB}$ středový úhel 110°. Určete velikost některého obloukového úhlu, který přísluší témuž oblouku.



51. Ve čtverci ABCD o straně $a = 10\,cm$ vypočtěte vzdálenost bodu D od přímky AS_{BC}.



52. Výška a základny rovnoramenného lichoběžníku mají délky v poměru 2 : 3 : 5. Obsah lichoběžníku je 2048 cm^2. Určete délku ramene lichoběžníku.



53. Je dána kružnice $k(S; 15\ cm)$ a bod A, $|AS| = 25\ cm$. Určete délku tětivy T_1T_2, body T_1 a T_2 jsou body dotyku tečen vedených z A ke kružnici k.

54. Jsou dány dvě soustředné kružnice o poloměrech 17 a 33 cm. Tětiva AB větší kružnice je rozdělena svými průsečíky C, D s menší kružnicí na 3 shodné úseky. Určete délku tětivy AB.

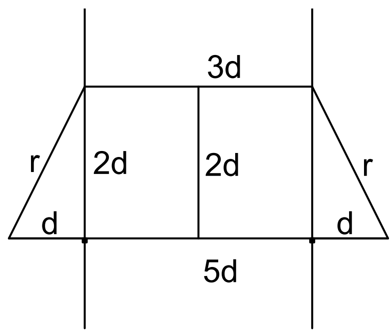
Výsledky

49. Není splněna trojúhelníková nerovnost: $1 + 2 \ngtr 3$, tj. trojúhelník nelze sestrojit.

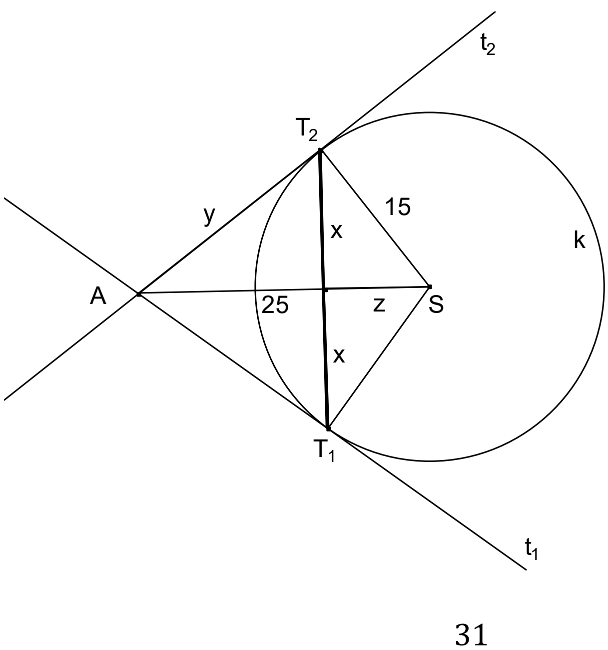
50. Obvodový úhel δ má poloviční velikost ze středového úhlu ω, tedy $\delta = 55°$.

51. Ve čtverci jsou 2 podobné $\triangle$, z nichž dostaneme: $cos\varphi = \frac{x}{10} = \frac{10}{y}$, kde $x = |DP|$ $a\ y = |AS_{BC}| = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}$, bod P je pata kolmice spuštěná z bodu D na úsečku AS_{BC}. Po dosazení y do rovnice $\frac{x}{10} = \frac{10}{y}$ dostaneme $x = 4\sqrt{5}$.

52. S využitím vzorce pro obsah lichoběžníku platí: $S = \frac{(5d+3d)\cdot 2d}{2} = 8d^2 = 2048$ $\Rightarrow d^2 = 256 \Rightarrow d = 16$; s využitím Pythagorovy věty vyplývá: $r^2 = (2d)^2 + d^2$ $\Rightarrow r^2 = 32^2 + 16^2 \Rightarrow r = 16\sqrt{5}\ cm$.



53.



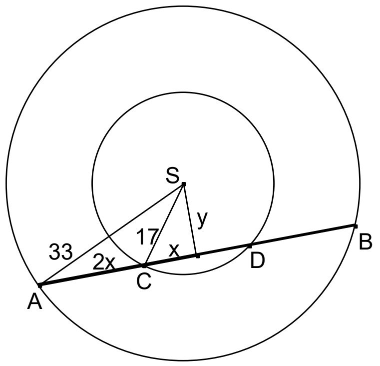
$y^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \;\; \Rightarrow [y = \pm 20 \wedge y > 0] \;\; \Rightarrow y = 20$;

Euklidova věta o odvěsně $15^2 = z \cdot 25 \quad \Rightarrow z = 9$;

$x^2 = 15^2 - 9^2 \;\Rightarrow [x = \pm 12 \wedge x > 0] \;\; \Rightarrow x = 12$;

$|T_1T_2| = 2x = 24\ cm$.

54.



$[\, y^2 = 17^2 - x^2 \wedge y^2 = 33^2 - (3x)^2] \;\Rightarrow [x = \pm 10 \wedge x > 0] \;\; \Rightarrow x = 10$;

$|AB| = 6x = 60\ cm$.

Stereometrie

55. Na krychli ABCDEFGH s hranou $a = 5\ cm$
    a) sestrojte řez rovinou $S_{AE}S_{HE}S_{CG}$,
    b) určete průnik přímky SL s povrchem krychle (S je střed krychle a pro bod L platí $C = S_{DL}$),
    c) vypočtěte odchylku rovin ADH a BDH,
    d) vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky FG.

56. Je dán kvádr ABCDEFGH o rozměrech $|AB| = 5\ cm, |BC| = 3\ cm, |AE| = 7\ cm$. Určete odchylku přímek AE a BH.

57. V pravidelném čtyřstěnu ABCD vypočtěte vzdálenost bodu D od roviny ABC.

58. V pravidelném trojbokém jehlanu je odchylka boční stěny od roviny podstavy 45°. Vypočtěte odchylku boční hrany od roviny podstavy.

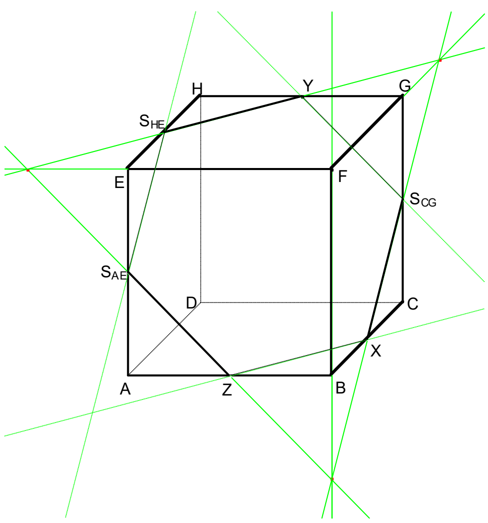
59. Odvoďte vzorec pro objem a povrch pravidelného čtyřstěnu o délce hrany a.

60. Rotační komolý kužel má poloměry podstav 17 cm a 5 cm a jeho strana má od roviny podstavy odchylku 60°. Určete jeho objem a povrch.

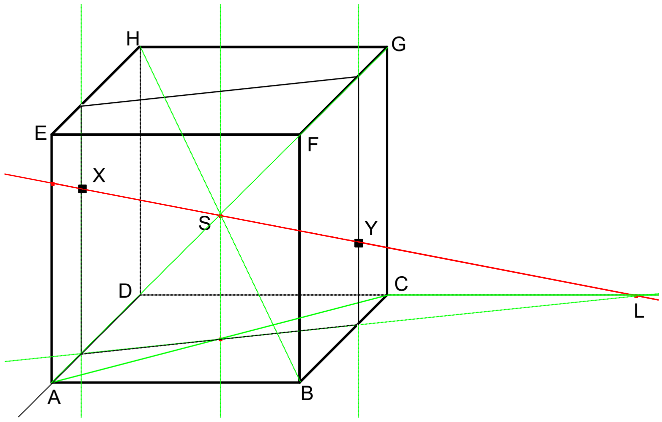
Výsledky

55.

a)

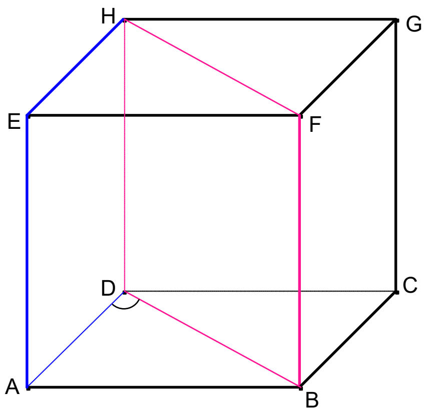


b)



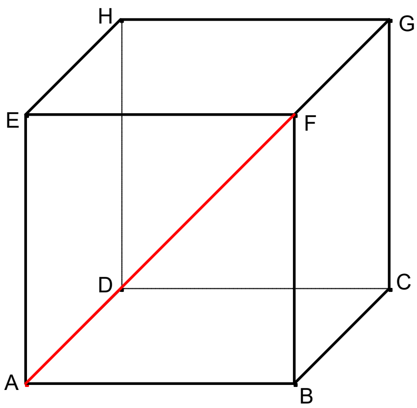
Řešením úlohy jsou body X a Y.

c)

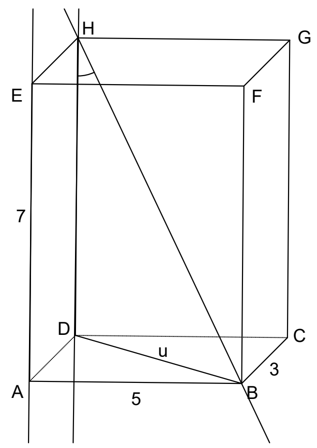


$\varphi = 45°$

d) $|A, FG| = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$



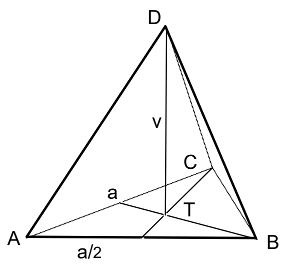
56.



$u = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{34}}{7} \Longrightarrow \varphi \doteq 39°48'$

57.

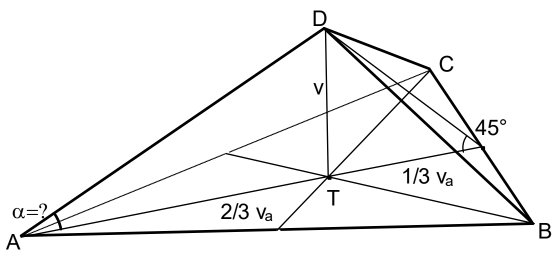


výška trojúhelníku ABC $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,

v trojúhelníku TCD je $|TC| = \frac{2}{3}v_a = \frac{a}{3}\sqrt{3}$,

výška čtyřstěnu je $v = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

58.



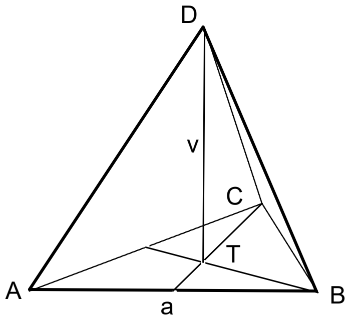
výška trojúhelníku ABC $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,

$|TS_{CB}| = \frac{1}{3}v_a = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

v rovnoramenném trojúhelníku DTS_{CB} je výška jehlanu $v = |TD| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

v trojúhelníku DTC je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{\frac{2}{3}v_a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi \doteq 26°34'$

59.

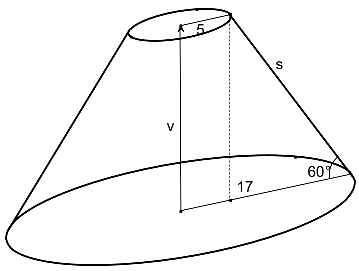


z příkladu 57 využijeme $v_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ a $v = \frac{a}{6}\sqrt{6}$,

$S = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2} = a^2\sqrt{3}\ (j^2)$

$V = \frac{1}{3} S_{ABC}. v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}\ (j^3)$

60.



$\text{tg}\, 60° = \frac{v}{12} \implies v = 12\sqrt{3}\ cm$

$\cos 60° = \dfrac{12}{s} \implies s = 24\ cm$

$V = \dfrac{\pi v}{3}({r_1}^2 + r_1 r_2 + {r_2}^2) = 1596\pi\sqrt{3}\ cm^3 \doteq 8684\ cm^3$

$S = \pi {r_1}^2 + \pi {r_1}^2 + \pi(r_1 + r_2)s = 842\pi\ cm^2 \doteq 2645\ cm^2$