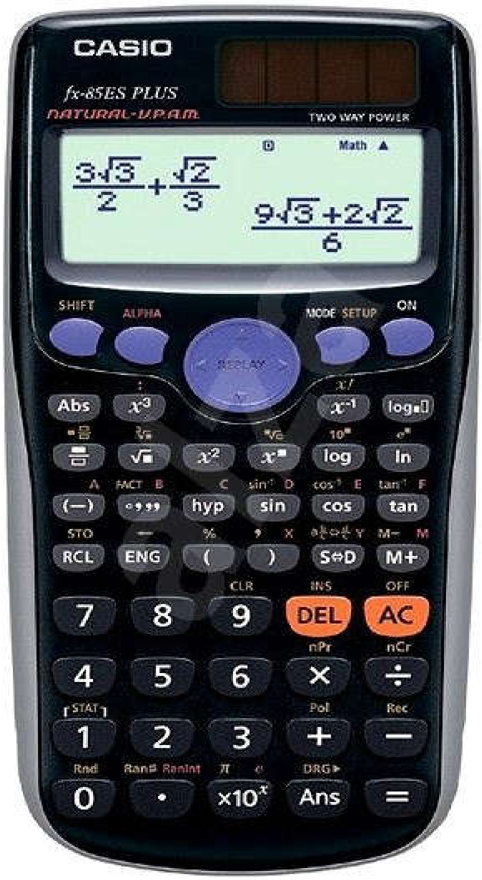
Gymnázium Botičská

MATEMATIKA PRO SOUČASNOST



RNDr. Milada Rezková
RNDr. Vlasta Sudzinová
Mgr. Eva Valentová
2017

Předmluva

Touto sbírkou chceme ukázat středoškolákům některé aplikace matematiky v reálných situacích.

Publikace je členěna na dvě kapitoly. První obsahuje 18 příkladů užití exponenciálních a logaritmických funkcí a rovnic v přírodních vědách. Druhá kapitola uvádí nejprve příklady analýzy spotřebního koše a rozpočtu spotřebitele a poté ukázky lineární optimalizace, tj. hledání extrémů lineárních funkcí dvou reálných proměnných na množině popsané soustavou lineárních nerovnic.

Učební text je určen studentům čtvrtého ročníku čtyřletých gymnázií, kteří si chtějí na příkladech z praxe procvičit zmiňované oblasti matematiky.

Autorky děkují Ing. Evženu Markalousovi za pomoc s typografií a cenné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

Obsah

Exponenciální a logaritmické závislosti

Vzorce používané v příkladech z praxe

1. Závislost hmotnosti $\boldsymbol{m}$ radioaktivní látky na čase $\boldsymbol{t}$ při její radioaktivní přeměně:
   $$\boldsymbol{m = m_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{T}}} \text{ nebo } \boldsymbol{m = m_0 \cdot e^{-\lambda . t}},$$
   kde $\boldsymbol{m_0}$ je počáteční hmotnost látky v čase $\boldsymbol{t} = 0$ s, $\boldsymbol{T}$ je poločas přeměny (tj. doba, za níž se hmotnost $\boldsymbol{m}_0$ zmenší na polovinu) a $\boldsymbol{\lambda}$ je přeměnová konstanta.

2. Závislost tlaku $\boldsymbol{p}$ na nadmořské výšce $\boldsymbol{h}$ (v km):
   $$\boldsymbol{p = p_0 \cdot 0,88^{h}} \text{ nebo } \boldsymbol{p = p_0 \cdot e^{\lambda . h}},$$
   kde $\boldsymbol{p_0}$ je tlak v nadmořské výšce $\boldsymbol{h} = 0$ km, $\boldsymbol{p}_0 \doteq 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, $\boldsymbol{\lambda}$ je konstanta.

3. Závislost tlaku nasycených vodních par $\boldsymbol{p}$ na absolutní teplotě $\boldsymbol{T}$:
   $$\boldsymbol{p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}},$$
   kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ jsou konstanty.
4. Závislost intenzity záření $\boldsymbol{I}$ na hloubce vrstvy $\boldsymbol{x}$ (v cm):
   $$\boldsymbol{I = I_0 \cdot e^{-\alpha x}},$$
   kde $\boldsymbol{\alpha}$ je absorpční koeficient (např. pro hliník 5,4)
   a $\boldsymbol{I_0}$ počáteční intenzita.

5. Pohyb hmotného bodu s přihlédnutím ke tření:
   $$\boldsymbol{m \cdot \ln v + k \cdot t = m \cdot C},$$
   kde $\boldsymbol{m}$ je hmotnost, $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost hmotného bodu, $\boldsymbol{t}$ je čas a $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C}$ jsou konstanty.

6. Závislost teploty $\boldsymbol{T}$ tělesa na čase $\boldsymbol{t}$ při přenesení tělesa o teplotě $\boldsymbol{T_1}$ do prostředí o teplotě $\boldsymbol{T_0}$:
   $$\boldsymbol{T = (T_1 - T_0) \cdot a^t + T_0},$$
   kde $\boldsymbol{a}$ je konstanta závislá na tvaru tělesa a jeho materiálu.

7. Model růstu populace:
   $$\boldsymbol{N = \frac{k \cdot N_0 \cdot a^t}{N_0 \cdot a^t + (k - N_0)}},$$
   kde $\boldsymbol{N_0}$ je původní počet obyvatel, $\boldsymbol{N}$ je počet obyvatel po $\boldsymbol{t}$ letech, $\boldsymbol{k}$ je maximální možný počet obyvatel na Zemi $[20 \cdot 10^9]$, $\boldsymbol{a} > 1$.

8. Závislost počtu bakterií $\boldsymbol{N}$na čase $\boldsymbol{t}$:
   $$\boldsymbol{N = N_0 \cdot a^t} \text{ nebo } \boldsymbol{N = N_0 \cdot e^{\lambda t}},$$
   kde $\boldsymbol{N_0}$ je počet bakterií v čase $\boldsymbol{t} = 0$ s, $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ konstanty.[OD]

Příklady

1. Poločas přeměny radia A je 183 s. Za jak dlouho od počátku přeměny zbude z původní hmotnosti jedna šestnáctina?

2. Poločas přeměny radia C je 19,7 min. Za kolik minut se jeho hmotnost zmenší na čtvrtinu?

3. Ze vzorce pro hmotnost radioaktivní látky při její radioaktivní přeměně vyjádřete poločas přeměny.

4. Ze vzorce pro tlak nasycené vodní páry vyjádřete absolutní teplotu T.

5. Porovnáním obou vzorců pro množství radioaktivní látky při její přeměně určete konstantu λ.

6. Rentgenové záření o vlnové délce $0,05$ μm prochází hliníkovou vrstvou.
   a) Vypočtěte procentový úbytek při průchodu vrstvou 1 mm.
   b) Určete tloušťku vrstvy potřebnou ke zmenšení intenzity záření na jednu polovinu.

7. Ze vzorce pro pohyb hmotného bodu vyjádřete závislost v na t.

8. V laboratoři je m_1 g radioaktivní látky s poločasem rozpadu T_1 a m_2 g radioaktivní látky o poločasu rozpadu T_2. Za jakou dobu budou hmotnosti obou látek stejné?

9. Máme 2 tělesa o teplotách $T_1 = 200°\text{C}, T_2 = 100°\text{C}$. Jsou přenesena na vzduch o teplotě 0°C. Za 10 minut se první ochladí na 100°C a druhé na 80°C. Za kolik minut budou mít obě tělesa stejnou teplotu?

10. Vakuová pumpa má být zkonstruována tak, aby v uzavřeném prostoru snížila tlak každou sekundu o 3 %.
    a) Kolik % by se touto pumpou snížil počáteční tlak za 5 s?
    b) Pomocí určité zkonstruované pumpy byl za 3 minuty snížen tlak na čtvrtinu. Vyhovuje tato pumpa požadavku na výkonnost?

11. V živém organismu je podíl radioaktivního $^{14}_{6}C$ konstantní, dochází sice k jeho přeměně, ale současně doplňování z vnějšku. Mrtvý organismus už $^{14}_{6}C$ nepřijímá. Skelet zvířete nalezený archeology obsahoval 11 % podílu $^{14}_{6}C$, který připadá na živý organismus. Jaké je stáří nálezu? ($T = 5570$ let)

12. Klesne-li tlak vzduchu na 40 % hodnoty tlaku na hladině moře, nemá již člověk dostatečný příjem kyslíku z atmosféry. Určete tuto kritickou výšku.

13. DDT (dichlordifenyltrichlorethan) je škodlivá látka, která se dostává potravinovým řetězcem do mléka a jiných potravin. Její koncentrace $5 \cdot 10^{-6}$ % je v současné době ještě tolerována, ale má se v budoucnu snížit na $2 \cdot 10^{-6}$ %. Používání DDT je dnes téměř všude zakázáno. Ale jeho rozklad probíhá pomalu, „poločas rozkladu“ je asi 30 let. Kdy bude dosaženo požadované nižší koncentrace?

14. V roce 1960 žilo na Zemi asi $3 \cdot 10^9$ lidí. V roce 1977 vzrostl počet lidí na $4,1 \cdot 10^9$. Kolik lidí bude žít na Zemi v roce 2100 podle modelu uvedeného v přehledu vzorců?

15. Počet bakterií jisté kultury vzroste za 1 hodinu o 32 %. Vyjádřete závislost počtu bakterií na čase dvěma různými způsoby.

16. Voda v nádobě má teplotu 80°C, okolí nádoby teplotu 15°C. Vypočtěte teplotu vody po 5 minutách. ($a = e^{-0,05}$)

17. Pacientovi byla podána jednorázově léčebná látka, jejíž koncentrace v jeho krvi dosáhla po určité době 3 mg/litr. Pak se tato koncentrace „exponenciálně“ snižovala. Přitom je známo, že její „poločas přeměny“ je asi 4 hodiny. Za jakou dobu se koncentrace snížila na 0,5 mg/litr?

18. Intenzita denního světla, které proniká do mořské vody, se snižuje v závislosti na hloubce exponenciálně. V hloubce 6 m je snížena na polovinu. Podmořská kamera potřebuje pro dobrý příjem alespoň 75 % intenzity denního světla. Do jaké největší hloubky ji lze použít?

Upraveno podle [OD]

Řešení

1. Využijeme vzorec 1, kde $m = \frac{1}{16} \cdot m_0, T = 183$ s, a dostaneme:

$$\frac{1}{16} \cdot m_0 = m_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{183}} \;/\!: m_0 \; (m_0 \neq 0)$$

$$\frac{1}{16} = (0,5)^{\frac{t}{183}} \text{ (rovnici logaritmujeme)}$$

$$\log \frac{1}{16} = \frac{t}{183} \cdot \log\, 0,5$$

$$t = \frac{\log \frac{1}{16}}{\log\, 0,5} \cdot 183$$

$$t \doteq 732 \text{ (s)} \doteq 12 \text{ (min)}$$

2. Využijeme vzorec 1, kde $m = \frac{1}{4} \cdot m_0, T = 197$ min, a dostaneme:

$$\frac{1}{4} \cdot m_0 = m_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{19,7}} \;/\!: m_0 \; (m_0 \neq 0)$$

$$\frac{1}{4} = (0,5)^{\frac{t}{19,7}} \text{ (rovnici logaritmujeme)}$$

$$\log \frac{1}{4} = \frac{t}{19,7} \cdot \log\, 0,5$$

$t = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log 0{,}5} \cdot 19{,}7$

$t \doteq 39{,}4$ (min)

3. Upravíme vzorec 1:

$m = m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ /: m_0 ($m_0 \neq 0$)

$\frac{m}{m_0} = (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log \frac{m}{m_0} = \frac{t}{T} \cdot \log 0{,}5$

$T \cdot \log \frac{m}{m_0} = t \cdot \log 0{,}5$ /: $\left(\log \frac{m}{m_0}\right)$

$T = \frac{t \cdot \log 0{,}5}{\log \frac{m}{m_0}}$ nebo zápis $T = \frac{t \cdot \log 0{,}5}{\log m - \log m_0}$

Jiný zápis výsledku získáme, když využijeme logaritmu se základem 0,5:

$m = m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ /: m_0 ($m_0 \neq 0$)

$\frac{m}{m_0} = (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log_{0{,}5} \frac{m}{m_0} = \frac{t}{T}$ /. T

$T \cdot \log_{0{,}5} \frac{m}{m_0} = t$ /: $(\log_{0{,}5} \frac{m}{m_0})$

$T = \frac{t}{\log_{0{,}5} \frac{m}{m_0}}$ nebo zápis $T = \frac{t}{\log_{0{,}5} m - \log_{0{,}5} m_0}$

4. Upravíme vzorec 3:

$p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}$ /: a ($a \neq 0$)

$\frac{p}{a} = b^{\frac{T}{c+T}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log \frac{p}{a} = \frac{T}{c+T} \cdot \log b$ / $\cdot$ $(c + T)$

$(c + T) \cdot \log \frac{p}{a} = T \cdot \log b$

$$c \cdot \log \frac{p}{a} + T \cdot \log \frac{p}{a} = T \cdot \log b$$

$$c \cdot \log \frac{p}{a} = T \cdot \log b - T \cdot \log \frac{p}{a}$$

$$c \cdot \log \frac{p}{a} = T \cdot \left(\log b - \log \frac{p}{a}\right) \; /: (\log b - \log \frac{p}{a})$$

$$T = \frac{c \cdot \log \frac{p}{a}}{\log b - \log \frac{p}{a}}$$

Užitím pravidel pro logaritmy získáme i jiné zápisy výsledku:

$$T = \frac{c \cdot (\log p - \log a)}{\log b - (\log p - \log a)} = \frac{c \cdot (\log p - \log a)}{\log b - \log p + \log a} = \frac{c \cdot (\log p - \log a)}{\log ab - \log p}$$

5. Porovnáme vzorce 1 a dostaneme:

$$m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}} = m_0 \cdot e^{-\lambda t} \; /: m_0 \; (m_0 \neq 0)$$

$(0{,}5)^{\frac{t}{T}} = e^{-\lambda t}$ (rovnici logaritmujeme)

$$\frac{t}{T} \cdot \ln 0{,}5 = -\lambda t \; /: t$$

$$\frac{\ln 0{,}5}{T} = -\lambda$$

$$\lambda = -\frac{\ln 0{,}5}{T} = -\frac{\ln 2^{-1}}{T} = \frac{\ln 2}{T}$$

6. Využijeme vzorec 4, kde $x = 1$ mm $= 0{,}1$ cm, $\alpha = 5{,}4$, a dostaneme:

$$I = I_0 \cdot e^{-5{,}4 \cdot 0{,}1}$$

$$I \doteq 0{,}583 \cdot I_0$$

a) Intenzita záření se snížila na 58,3 % původní hodnoty, klesla tedy o 41,7 %.

b) V druhé části počítáme x pro $I = 0{,}5 \cdot I_0$:

$$0{,}5 \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{-5{,}4 \cdot x} \; /: I_0 \; (I_0 \neq 0)$$

$0{,}5 = e^{-5{,}4 \cdot x}$(rovnici logaritmujeme)

$$\ln 0{,}5 = -5{,}4 \cdot x \; /: (-5{,}4)$$

$$x = \frac{\ln 0{,}5}{-5{,}4}$$

$$x \doteq 0{,}128 \text{ (cm)} = 1{,}28 \text{ (mm)}$$

7. Upravíme vzorec 5:

$$m \cdot \ln\ v + k \cdot t = m \cdot C$$

$$m \cdot \ln\ v = m \cdot C - k \cdot t \ /{:}\, m$$

$$\ln\ v = C - \frac{k \cdot t}{m}$$

Užijeme definici logaritmu a dostaneme:

$$v = e^{C - \frac{k \cdot t}{m}}$$

8. Využijeme vzorec 1, kde hmotnosti jsou po řadě:

$$m = m_1 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T_1}}, \qquad m = m_2 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T_2}}$$

$m_1 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T_1}} = m_2 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T_2}}$ (rovnici logaritmujeme)

$$\log\ m_1 + \frac{t}{T_1} \cdot \log\ 0{,}5 = \log\ m_2 + \frac{t}{T_2} \cdot \log\ 0{,}5$$

$$\log\ m_1 - \log\ m_2 = t \cdot \log\ 0{,}5 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \ /{:} \log\ 0{,}5$$

$$\frac{\log\ m_1 - \log\ m_2}{\log\ 0{,}5} = t \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 \cdot T_2} \ /\cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2}$$

$$t = \frac{\log\ m_1 - \log\ m_2}{\log\ 0{,}5} \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2}$$

Protože $\log\ 0{,}5 = \log\ 2^{-1} = -\log\ 2$, lze výsledek zapsat ve tvaru:

$$t = \frac{\log\ m_1 - \log\ m_2}{\log\ 2} \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1}$$

9. Využijeme vzorec 6. Pro obě tělesa nejprve vypočítáme konstanty a_1 a a_2:

$100 = (200 - 0) \cdot {a_1}^{10} + 0$	$80 = (100 - 0) \cdot {a_2}^{10} + 0$
$\frac{100}{200} = {a_1}^{10}$	$\frac{80}{100} = {a_2}^{10}$
$a_1 = \sqrt[10]{0{,}5}$	$a_2 = \sqrt[10]{0{,}8}$

Obě tělesa mají mít stejnou teplotu, proto dostáváme:

$(200 - 0) \cdot \left(\sqrt[10]{0{,}5}\right)^t + 0 = (100 - 0) \cdot \left(\sqrt[10]{0{,}8}\right)^t + 0$ (rovnici logaritmujeme)

$$\log\ 200 + t \cdot \log \sqrt[10]{0{,}5} = \log\ 100 + t \cdot \log \sqrt[10]{0{,}8}$$

$\log\ 200 - \log\ 100 = t \cdot \left(\log \sqrt[10]{0{,}8} - \log \sqrt[10]{0{,}5}\right)$

$\log\ 2 = t \cdot \log \sqrt[10]{1{,}6} / : \log \sqrt[10]{1{,}6}$

$t = \dfrac{\log\ 2}{\log \sqrt[10]{1{,}6}}$

$t \doteq 15$ (min)

10. Pokles tlaku vyjadřuje vzorec $p = p_0 \cdot 0{,}97^t$, kde p_0 je počáteční tlak, p je tlak po uplynutí t sekund.
    a) Tlak po 5 sekundách tedy bude: $p = p_0 \cdot 0{,}97^5 \doteq 0{,}859 \cdot p_0$.
       Tlak klesl po 5 sekundách na 85,9 % původní hodnoty, zmenšil se o 14,1 %.
    b) Tlak po 3 minutách (180 s) bude: $p = p_0 \cdot 0{,}97^{180}$

$p \doteq 0{,}004 \cdot p_0$

$p \neq \dfrac{1}{4} \cdot p_0$

11. Využijeme vzorec 1, kde $m = 0{,}11 \cdot m_0$, $T = 5570$ let, a dostaneme:

$0{,}11 \cdot m_0 = m_0 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{T}} / : m_0 (m_0 \neq 0)$

$0{,}11 = (0{,}5)^{\frac{t}{T}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log\ 0{,}11 = \dfrac{t}{T} \cdot \log\ 0{,}5$

$t = \dfrac{T \cdot \log\ 0{,}11}{\log\ 0{,}5}$

$t = \dfrac{5570 \cdot \log\ 0{,}11}{\log\ 0{,}5}$

$t \doteq 17700$ (let)

12. Využijeme vzorec 2, kde $p = 0{,}4 \cdot p_0$, a dostaneme:

$0{,}4 \cdot p_0 = p_0 \cdot 0{,}88^h / : p_0 (p_0 \neq 0)$

$0{,}4 = 0{,}88^h$ (rovnici logaritmujeme)

$\log 0{,}4 = h \cdot \log 0{,}88$

$h = \dfrac{\log 0{,}4}{\log 0{,}88}$

$h \doteq 7{,}168(\text{km}) \doteq 7200(\text{m})$

13. Užijeme vzorec 1, kde $m = 2 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ a $T = 30$ let, a dostaneme:

$2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{30}}$

$0{,}4 = (0{,}5)^{\frac{t}{30}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log\ 0{,}4 = \dfrac{t}{30} \cdot \log\ 0{,}5\ \ /\cdot 30$

$t = \dfrac{30 \cdot \log\ 0{,}4}{\log\ 0{,}5}$

$t \doteq 40$ (let)

14. Využijeme vzorec 7, kde $N = 4{,}1 \cdot 10^9$, $N_0 = 3 \cdot 10^9$, $k = 20 \cdot 10^9$, $t = 17$ let.

Nejprve vypočítáme a:

$4{,}1 \cdot 10^9 = \dfrac{3 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot a^{17}}{3 \cdot 10^9 \cdot a^{17} + (20 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^9)}\ /: 10^9$

$4{,}1 = \dfrac{3 \cdot 20 \cdot a^{17}}{3 \cdot a^{17} + (20 - 3)}$

$4{,}1 \cdot (3 \cdot a^{17} + 17) = 60 \cdot a^{17}$

$12{,}3 \cdot a^{17} + 69{,}7 = 60 \cdot a^{17}$

$69{,}7 = 47{,}7 \cdot a^{17}$

$\dfrac{69{,}7}{47{,}7} = a^{17}$

$a = \sqrt[17]{\dfrac{69{,}7}{47{,}7}}$

$a \doteq 1{,}02256$

Nyní zjistíme počet obyvatel v roce 2100, tedy po uplynutí 140 let od roku 1960:

$N = \dfrac{3 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 1{,}02256^{140}}{3 \cdot 10^9 \cdot 1{,}02256^{140} + (20 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^9)}$

$N \doteq 16 \cdot 10^9 = 1{,}6 \cdot 10^{10}$

15. Počet bakterií na počátku označíme N_0. Za 1 hodinu se jejich počet zvětší o 32 %, bude jich tedy $1{,}32 \cdot N_0$. Každou další hodinu se počet bakterií znovu 1,32krát navýší. Hledaný vzorec je: $N = N_0 \cdot 1{,}32^t$ nebo $N = N_0 \cdot e^{\ln(1{,}32)^t}$.

16. Využijeme vzorec 6, kde $T_1 = 80$ °C, $T_0 = 15$ °C, $t = 5$ min, $a = e^{-0{,}05}$, a dostaneme:

$T = (80 - 15) \cdot (e^{-0,05})^5 + 15$

$T \doteq 66$ (°C)

17. Využijeme vzorec 1, kde $m_0 = 3$ mg/litr, $m = 0,5$ mg/litr, $T = 4$ hod, a dostaneme:

$0,5 = 3 \cdot\ (0,5)^{\frac{t}{4}}$ /: 3

$\frac{0,5}{3} = (0,5)^{\frac{t}{4}}$ (rovnici logaritmujeme)

$\log\frac{1}{6} = \frac{t}{4} \cdot \log\ 0,5$

$t = \frac{4 \cdot\ \log\ \frac{1}{6}}{\log\ 0,5}$

$t \doteq 10$ (hod)

18. Do vzorce 4 nejprve dosadíme $I = 0,5 \cdot I_0$, $x = 6$ m $= 600$ cm a vypočítáme koeficient α:

$0,5 \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{-\alpha\cdot 600}/: I_0\ (I_0 \neq 0)$

$0,5 = e^{-\alpha\cdot 600}$ (rovnici logaritmujeme)

$\ln\ 0,5 = -\alpha \cdot 600\ /: (-600)$

$\alpha = \frac{\ln\ 0,5}{-600}$

$\alpha \doteq 0,001155$

Nyní vypočítáme hloubku x pro $I = 0,75 \cdot I_0$ a dostaneme:

$0,75 \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{-0,001155\cdot x}\ /: I_0\ (I_0 \neq 0)$

$0,75 = e^{-0,001155\cdot x}$ (rovnici logaritmujeme)

$\ln\ 0,75 = -0,001155 \cdot x$

$x = \frac{\ln 0,75}{-0,001155}$

$x \doteq 249$ (cm) $\doteq 2,5$(m)

Lineární optimalizace

Užití vektorové a maticové algebry

Pojmy lineární algebry mají široké uplatnění v nejrůznějších disciplínách.

V mikroekonomii se často řeší příklady při analýze spotřebního koše, rozpočtu spotřebitele a optimalizaci portfolia.

Teorie

Násobení dvou aritmetických *n*-složkových vektorů (oba vektory musí mít stejný počet složek) definujeme jako **skalární součin těchto vektorů**, tj.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \cdot (b_1; b_2; \dots; b_n) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$, existují-li reálná čísla $c_1, c_2, \dots, c_r$ tak, že:

$$\vec{b} = c_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + c_r \cdot \overrightarrow{a_r}$$

Čísla $c_1, c_2, \dots, c_r$ se nazývají **koeficienty lineární kombinace.**

Mějme např. vektory $(-2; 1), (3; 4), (0; -6)$. Vynásobíme-li každý z těchto vektorů nějakým (libovolným) reálným číslem a tyto násobky sečteme, dostaneme lineární kombinaci těchto vektorů, např.:

$$4 \cdot (-2; 1) + (-2) \cdot (3; 4) + \frac{1}{3} \cdot (0; -6) = (-8; 4) + (-6; -8) + (0; -2) = (-14; -6)$$

Příklad 1

Rodina hodlá nakoupit 5 kg mouky, 20 vajec, 5 l mléka, 2 kg meruněk a 4 ks ¼ kg másla. Spotřební koš je tedy dán vektorem $\vec{q} = (5; 20; 5; 2; 4)$. Předpokládejme, že 1 kg mouky stojí 10 Kč, 1 vejce 5 Kč, 1 l mléka 20 Kč, 1 kg meruněk 65 Kč a 1 ks másla 50 Kč. Cenový vektor je pak roven $\vec{p} = (10; 5; 20; 65; 50)$. Určete celkovou cenu spotřebního koše.

Řešení

Celková cena spotřebního koše je tedy rovna skalárnímu součinu vektorů

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (5; 20; 5; 2; 4) \cdot (10; 5; 20; 65; 50) == 5 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 65 + 4 \cdot 50 \\ = 580 \text{ (Kč)}$$

Poznámka
Spotřební koše uváděné v množství jednotlivých komponent se v jednoduchých ekonomických modelech prezentují jako vektory $\vec{q} = (q_1; q_2; \dots; q_n)$; odpovídají jim vektory cen

$\vec{p} = (p_1;\ p_2;\ \dots;\ p_n)$ uváděné v cenách za jednotku množství. Celková cena spotřebního koše je pak rovna skalárnímu součinu obou vektorů, tedy reálnému číslu

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n$$

Příklad 2

Obchodník má přebytek zboží **a** a **b**. Chce ho co nejdříve vyprodat, proto zboží zlevnil, ale jen ve speciálních sadách. V první sadě je 1 výrobek **a** a 2 výrobky **b** v druhé sadě jsou 3 výrobky **a** a 1 výrobek **b**. Jak má nakupující postupovat, aby nakoupil co nejlevněji, chce-li koupit 100 kusů výrobku **a** a 50 kusů výrobku **b**?

Řešení

Zjistíme, zda vektor $(100; 50)$ je lineární kombinací vektorů $(1; 2)$ a $(3; 1)$, tedy zda existují čísla c_1, c_2 taková, že

$$(100; 50) = c_1 \cdot (1; 2) + c_2 \cdot (3; 1)$$

Získáme soustavu lineárních rovnic

$$c_1 + 3c_2 = 100$$

$$2c_1 + c_2 = 50,$$

kterou vyřešíme např. vyjádřením c_1 z první a dosazením do druhé rovnice. Soustava má právě jedno řešení $c_1 = 10, c_2 = 30$.

Zjistili jsme, že vektor $(100; 50)$ je lineární kombinací vektorů $(1; 2)$ a $(3; 1)$ s koeficienty 10 a 30. Kupující nejlépe využije výhodné nabídky, koupí-li 10 sad prvního typu a 30 sad druhého typu.

Cvičení

1. Pomocí výpočtu skalárního součinu vektorů určete hodnotu spotřebního koše, pokud
   a) zákazník hodlá koupit 4 páry ponožek, 1 sako, 2 kalhoty a 5 košil, přičemž jeden pár ponožek stojí 30 Kč, sako 1 200 Kč, kalhoty 750 Kč a košile 320 Kč;
   b) zákazník hodlá koupit 2 malé skříňky, 3 velké skříňky a 1 digestoř, přičemž malá skříňka stojí 1 030 Kč, velká skříňka 2 200 Kč a digestoř 3 320 Kč.

2. Obchodník vyprodává zboží **a**, a **b**, nabízí speciální zlevněné sady. Jak má zákazník postupovat, aby nakoupil co nejlevněji, pokud
   a) v sadě prvního typu je 1 výrobek **a** a 3 výrobky **b**, druhého typu jsou 4 výrobky **a** a 10 výrobků **b** a zákazník hodlá koupit 29 kusů výrobku **a** a 75 kusů výrobku **b**;
   b) v sadě prvního typu je 11 výrobků **a** a 4 výrobky **b**, druhého typu jsou 2 výrobky **a** a 9 výrobků **b** a zákazník hodlá koupit 50 kusů výrobku **a** a 43 kusů výrobku **b**?

Výsledky cvičení

1. a) 4 420 Kč;

   b) 11 980 Kč.

2. a) 5 sad prvního typu; 6 sad druhého typu;

   b) 4 sady prvního typu; 3 sady druhého typu

Příklad 3

Týdenní produkce společnosti na výrobu vozů je uvedena v tabulce:

	Produkt 1 (v tisících kusů)	Produkt 2 (v tisících kusů)	Produkt 3 (v tisících kusů)	Produkt 4 (v tisících kusů)
Závod 1	7	5	0	1
Závod 2	0	4	3	7
Závod 3	3	2	0	2

Zisky společnosti za 1 ks produktu jsou následující:

Produkt 1 (v Kč)	Produkt 2 (v Kč)	Produkt 3 (v Kč)	Produkt 4 (v Kč)
3	9	6	8

Určete celkový zisk jednotlivých závodů v tomto týdnu.

Který závod přináší společnosti nejvyšší zisk?

Řešení

Zisk závodu 1 je $7 \cdot 3 + 5 \cdot 9 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = \ 74$ (tisíc Kč).

Zisk závodu 2 je $0 \cdot 3 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 110$ (tisíc Kč).

Zisk závodu 3 je $3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = \ 43$ (tisíc Kč).

Společnost má nejvyšší zisk ze závodu 2.

Poznámka

Tyto výpočty lze provést i užitím součinu matic.

Údaje z tabulek přepíšeme pomocí matic $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Matice vzniklá jejich vynásobením zachycuje zisky jednotlivých závodů:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 110 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Příklad 4

Spotřebitelé **A**, **B** a **C** hodlají zakoupit 4 druhy zboží $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$ a $\mathbf{z_4}$. Celý nákup může každý ze spotřebitelů zrealizovat buď v obchodě $\mathbf{O_1}$nebo $\mathbf{O_2}$.

Množství zboží (v kusech) požadovaná jednotlivými spotřebiteli:

	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$
A	6	5	3	1
B	3	6	2	2
C	3	4	3	1

Ceny zboží (v eurech) v obchodech $\mathbf{O_1}$ **a** $\mathbf{O_2}$**:**

	$\mathbf{O_1}$	$\mathbf{O_2}$
$\mathbf{z_1}$	1,00	1,00
$\mathbf{z_2}$	2,00	2,00
$\mathbf{z_3}$	5,00	4,00
$\mathbf{z_4}$	16,00	17,00

Řešení

Spotřebitel **A** zaplatí

- v obchodě $\mathbf{O_1}$: $6 \cdot 1{,}00 + 5 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 5{,}00 + 1 \cdot 16{,}00 = 47$ (euro)
- v obchodě $\mathbf{O_2}$: $6 \cdot 1{,}00 + 5 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 17{,}00 = 45$ (euro)

Spotřebitel **B** zaplatí

- v obchodě $\mathbf{O_1}$: $3 \cdot 1{,}00 + 6 \cdot 2{,}00 + 2 \cdot 5{,}00 + 2 \cdot 16{,}00 = 57$ (euro)
- v obchodě $\mathbf{O_2}$: $3 \cdot 1{,}00 + 6 \cdot 2{,}00 + 2 \cdot 4{,}00 + 2 \cdot 17{,}00 = 57$ (euro)

Spotřebitel **C** zaplatí

- v obchodě $\mathbf{O_1}$: $3 \cdot 1{,}00 + 4 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 5{,}00 + 1 \cdot 16{,}00 = 42$ (euro)
- v obchodě $\mathbf{O_2}$: $3 \cdot 1{,}00 + 4 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 17{,}00 = 40$ (euro)

Je vidět, že pro spotřebitele **A** i **C** je výhodnější nakoupit v obchodě $\mathbf{O_2}$.

Spotřebitel **B** by zaplatil stejně v $\mathbf{O_1}$i v $\mathbf{O_2}$.[BOV]

Poznámka

Úlohu lze také řešit pomocí vektorů a matic.

Částky zaplacené spotřebiteli v jednotlivých obchodech lze zapsat jako skalární součiny vektorů $\overrightarrow{q_i} = (q_{i1}; q_{i2}; q_{i3}; q_{i4})$ udávajících počty kusů zboží požadované spotřebiteli a vektorů $\overrightarrow{p_j} = (p_{j1}; p_{j2}; p_{j3}; p_{j4})$ představujících ceny zboží v příslušných obchodech.

Tedy například:

částku zaplacenou spotřebitelem A v obchodě O1 jako skalární součin

$$\overrightarrow{q_1} \cdot \overrightarrow{p_1} = (6;\ 5;\ 3;\ 1) \cdot (1{,}00; 2{,}00; 5{,}00; 16{,}00) == 6 \cdot 1{,}00 + 5 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 5{,}00 + 1 \cdot 16{,}00 = 47,$$

- částku zaplacenou spotřebitelem **A** v obchodě $\mathbf{O_2}$ jako skalární součin

$$\overrightarrow{q_1} \cdot \overrightarrow{p_2} = (6;\ 5;\ 3;\ 1) \cdot (1{,}00; 2{,}00; 4{,}00; 17{,}00) == 6 \cdot 1{,}00 + 5 \cdot 2{,}00 + 3 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 17{,}00 = 45.$$

Celkově lze ceny zaplacené spotřebiteli **A**, **B**, **C** v každém z obchodů $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$ zapsat pomocí součinu poptávkové matice $\boldsymbol{Q}$ a cenové matice $\boldsymbol{P}$ (P z anglického price).

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 45 \\ 57 & 57 \\ 42 & 40 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}$$

Například první řádek matice $\boldsymbol{R}$ vyjadřuje částky, které zaplatí spotřebitel **A** v obchodě $\mathbf{O_1}$ a v obchodě $\mathbf{O_2}$.

Znovu je vidět, že pro spotřebitele **A** a **C** je výhodnější nakoupit v obchodě $\mathbf{O_2}$ spotřebitel **B** by zaplatil stejně v $\mathbf{O_1}$ i v $\mathbf{O_2}$.[BOV]

Cvičení

1. Spotřebitelé Aleš a Barbora hodlají koupit zboží $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$ a $\mathbf{z_4}$, každý ze spotřebitelů v jiném množství. Celý nákup může každý uskutečnit buď v obchodě $\mathbf{O_1}$, nebo v $\mathbf{O_2}$. V následujících tabulkách je uvedeno, kolik kusů zboží $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$, $\mathbf{z_4}$ každý ze spotřebitelů chce a jaké jsou ceny zboží v obchodech $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$. Pomocí součinu matic určete, který obchod bude pro každého ze spotřebitelů výhodnější.

   Požadovaná množství zboží

	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$
Aleš	2	5	4	1
Barbora	3	0	2	2

   Ceny v obchodech $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$

	$\mathbf{O_1}$	$\mathbf{O_2}$

z₁	2,00	1,00
z₂	2,00	2,00
z₃	5,00	4,00
z₄	6,00	7,00

2. Spotřebitelé Eva, Václav a Alena hodlají zakoupit zboží $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$, $\mathbf{z_4}$, každý ze spotřebitelů v jiném množství. Celý nákup může každý ze spotřebitelů zrealizovat buď v obchodě $\mathbf{O_1}$ nebo v $\mathbf{O_2}$. Který obchod bude pro Evu, Václava a Alenu výhodnější? [BOV]

Požadovaná množství zboží

	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$
Eva	7	1	2	4
Vašek	4	3	1	2
Alena	2	4	1	4

Ceny v obchodech $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$

	$\mathbf{O_1}$	$\mathbf{O_2}$
$\mathbf{z_1}$	9	8
$\mathbf{z_2}$	17	19
$\mathbf{z_3}$	8	4
$\mathbf{z_4}$	12	13

Výsledky cvičení

$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 35 \\ 28 & 25 \end{pmatrix}$$

Pro oba spotřebitele Aleše a Barboru je výhodnější nákup v $\mathbf{O_2}$.

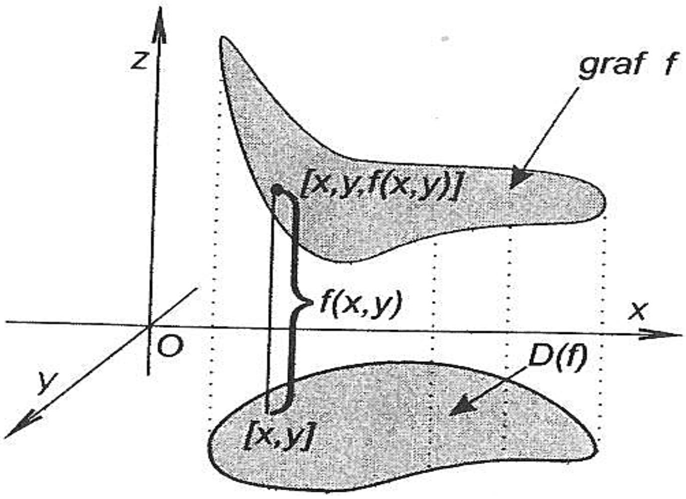
$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 81 \\ 17 & 19 \\ 8 & 4 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 135 \\ 119 & 119 \\ 142 & 148 \end{pmatrix}$$

Eva levněji nakoupí v obchodě $\mathbf{O_2}$ za 135 Kč (ve výsledné matici 1. řádek odpovídá Evě a 2. sloupec nákupu v $\mathbf{O_2}$). Pro Alenu je výhodnější pořídit nákup za 142 Kč v obchodě $\mathbf{O_1}$ (3. řádek výsledné matice). Václav nakoupí v obou obchodech za stejnou cenu 119 Kč (prostřední řádek výsledné matice). [BOV]

Určení extrémů lineárních funkcí dvou reálných proměnných

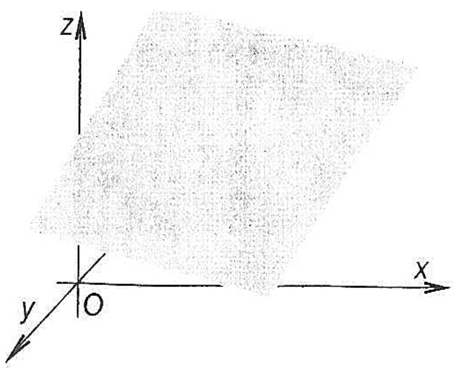
Teorie

Reálná funkce $f(x, y)$ dvou reálných proměnných (dále jen funkce dvou reálných proměnných) je zobrazení, jehož vzory jsou uspořádané dvojice reálných čísel $X = [x, y]$ a obrazy (značíme z) jsou reálná čísla. Funkční předpis má tvar $z = f(x, y)$ nebo $z = f(X)$. Číslo $f(X)$se nazývá **funkční hodnota** v bodě X, viz obr. 1.[BHN]

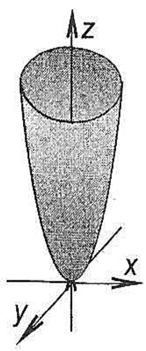


Obrázek 1 Graf funkce dvou proměnných

Graf funkce dvou proměnných je tvořen takovými body prostoru, které mají souřadnice $[x, y, f(x, y)]$. První dvě souřadnice jsou proměnné z $\mathcal{D}_f\left([x, y] \in \mathcal{D}_f\right)$ a třetí souřadnice je funkční hodnota $f(x, y)$. Graf si můžeme představit jako „nějakou plochu“ umístěnou v trojrozměrném prostoru $\mathbb{E}_3$. Graf lineární a kvadratické funkce je zobrazen na obr. 2, 3.[BHV]



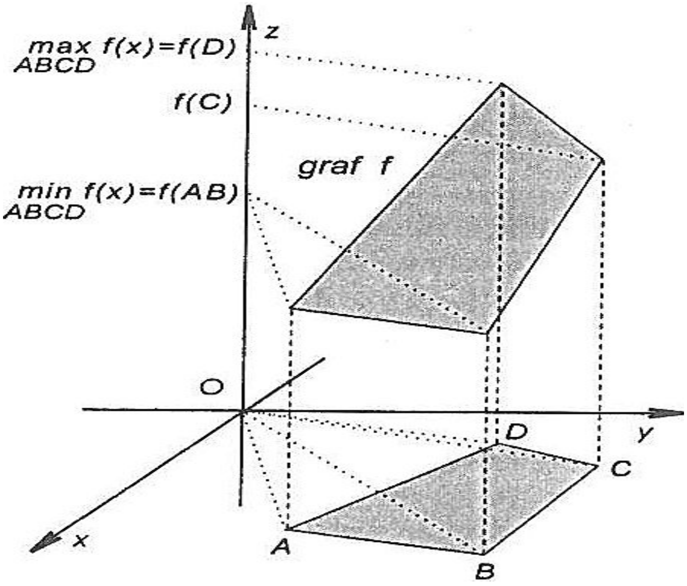
Obrázek 2 Graf lineární funkce



Obrázek 3 Graf kvadratické funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$

Věta (extrémy lineární funkce na konvexním mnohoúhelníku)

Lineární funkce dvou reálných proměnných definovaná na konvexním mnohoúhelníku nabývá maxima a minima v některých svých vrcholech.



Obrázek 4 lineární funkce na konvexním čtyřúhelníku

Příklad 5

Závod vyrábí speciální motorky a mopedy. Zisk z výroby jedné motorky je 4 tisíce Kč, zisk z výroby jednoho mopedu je 1 tisíc Kč. Počet výrobků za rok je omezen výrobní kapacitou závodu a poptávkou. Počet všech motorek a mopedů dohromady vyrobených za jeden rok **nepřekročí** 50 ks a přitom se vyrobí **nejméně** o 20 mopedů více než motorek.

Určete takový plán výroby motorek a mopedů, aby byl **finanční zisk** závodu za daných podmínek **největší**. [SL]

Řešení

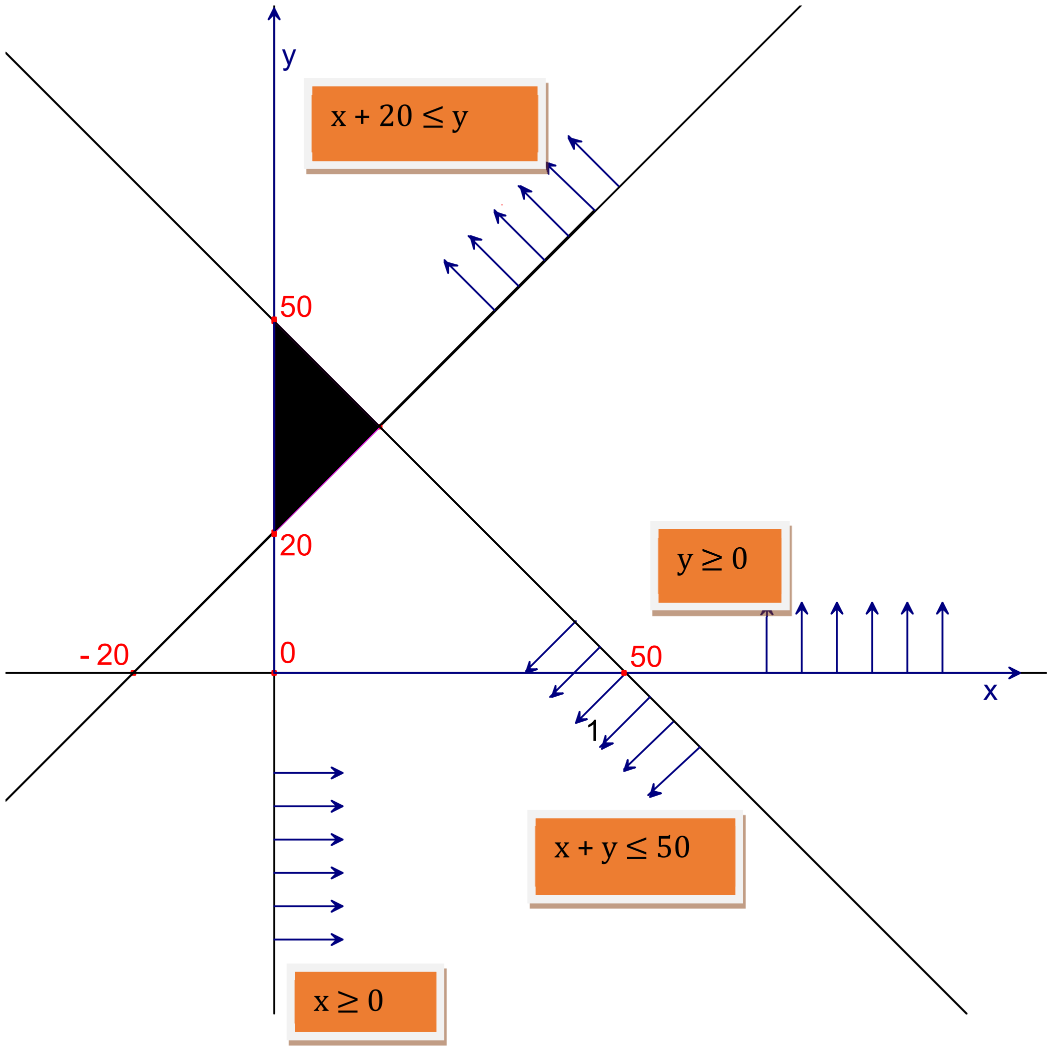
	Počet motorek vyrobených za 1 rok	Zisk (v Kč)
Motorky	x	4000
Mopedy	y	1000

Podle podmínek zadání musí platit: $x + y \leq 50$

a zároveň $x + 20 \leq y$.

Určitě je též splněno: $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$.

Tyto čtyři nerovnice po zakreslení do kartézského grafu určují definiční obor funkce výroby (v ekonomii se nazývá **funkce produkce** nebo **spotřební funkce** dvou reálných proměnných), viz graf 1.



Graf 1 Spotřební funkce dvou reálných proměnných

Funkce produkce je podle zadání příkladu $P(x,y) = 4000x + 1000y$.

Hledáme x, y taková, pro něž tato produkční funkce $P(x,y)$ dosáhne maxima na definičním oboru $\mathcal{D}_f$ zakresleném na grafu 1.

Produkční funkce $P(x,y)$ je lineární funkce definovaná na konvexním mnohoúhelníku (v tomto případě je $\mathcal{D}_f$ trojúhelník ABC), a má tedy podle předchozí teorie zaručen extrém v některém z vrcholů tohoto trojúhelníku.

Nejprve určíme souřadnice vrcholů $\triangle ABC$. Každý z vrcholů je průsečíkem dvou přímek (řešíme soustavy dvou lineárních rovnic).

$A = [0;20], B = [15;35], C = [0;50]$

Poté spočítáme funkční hodnoty produkční funkce $P(x,y)$ v těchto bodech:

$P(A) = 4\,000 \cdot 0 + 1\,000 \cdot 20 = 20\,000$

$P(B) = 4\,000 \cdot 15 + 1\,000 \cdot 35 = 95\,000$ maximum funkce $P(x,y)$

$P(C) = 4\,000 \cdot 0 + 1\,000 \cdot 50 = 50\,000$

Závěr

Podnik dosáhne maximálního zisku 95 000 Kč při výrobě 15 motorek a 35 mopedů za rok.

Příklad 6

Soukromá pekárna KABÁT produkuje mimo jiné dva typy oblíbených chlebů – kváskový balvan a celozrnný bochník. Na výrobu těchto chlebů je v pekárně vymezeno **nejvýše** 2,5 pracovních hodin denně (9000 s). Výrobci mají k dispozici **nejvýše** 200 kg chlebového těsta, přičemž kváskový balvan váží v surovém stavu 2 kg a celozrnný bochník 1 kg.

Výroba kváskového balvanu trvá 60 s, výroba bochníku 3 minuty.

Cena kváskového balvanu je 50 Kč za 1 kus a bochníku 20 Kč za 1 kus.

Stanovte takovou optimální produkci výroby těchto dvou druhů chlebů, aby bylo dosaženo **maximální hodnoty zisku** pekárny nezávisle na odbytu.

Řešení

Cílem úlohy je stanovit program výroby, tedy určit počet kusů kváskového balvanu a celozrnného bochníku, které je třeba vyrobit za dodržení podmínek stanovených v zadání, aby byl zaručen maximální zisk.

	Kváskový balvan	Celozrnný bochník
Počet kusů	x	y
Spotřeba těsta [kg/ks]	2	1
Čas výroby [s/ks]	60	180
Cena výrobku [Kč/ks]	50	20

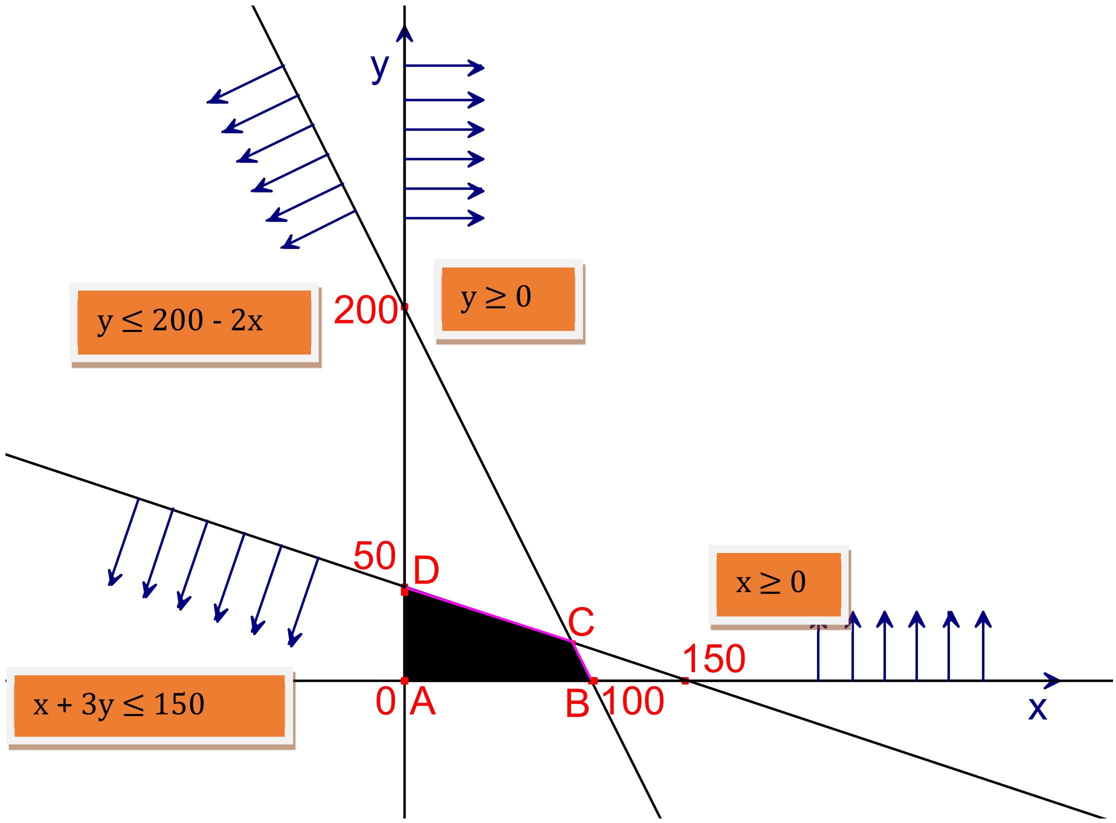
Ze zadání úlohy určíme podmínky pro definiční obor produkční funkce $P(x, y)$.

Musí platit: $2x + y \leq 200$

a zároveň $60x + 180y \leq 9000$.

Dále musí být splněno: $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$.

Tyto čtyři nerovnice po zakreslení do kartézského grafu určují definiční obor produkční funkce dvou reálných proměnných; viz graf 2.



Graf 2 Produkční funkce dvou reálných proměnných

Funkce produkce $P(x, y)$ je závislá na počtech výrobků x; y a je definována takto: $P(x, y) = 50x + 20y$. Hledáme její maximum na konvexním mnohoúhelníku (v tomto případě je $\mathcal{D}_f$ žlutý čtyřúhelník $ABCD$), viz graf 2. Produkční funkce $P(x, y)$ je lineární funkce, a má tedy podle předchozí teorie zaručenu existenci extrému v některém z vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$.

Nejprve určíme souřadnice vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$:

$A = [0; 0], B = [100; 0], C = [90; 20], D = [0; 50]$

Poté spočítáme funkční hodnoty produkční funkce $P(x, y)$ v těchto bodech:

$P(A) = 50 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$ (Kč)

$P(B) = 50 \cdot 100 + 20 \cdot 0 = 5\,000$ (Kč) maximum funkce $P(x, y)$

$P(C) = 50 \cdot 90 + 20 \cdot 20 = 4\,900$ (Kč)

$P(D) = 50 \cdot 0 + 20 \cdot 50 = 1\,000$ (Kč).

Řešením je dvojice $x = 100, y = 0$. V takovém případě bude hodnota funkce produkce maximální (zisk 5 000 Kč)

Závěr

Podnik dosáhne maximálního zisku 5 000 Kč při výrobě 100 ks kváskového balvanu, celozrnný bochník nebude vyrábět. Aby se firmě vyplatilo vyrábět celozrnný bochník, musela by změnit kalkulaci.

Příklad 7

Smíchovský pivovar Staropramen a pivovar Popovický kozel rozváží jedním ze závozů svoji produkci do Radotína, Strašnic a Tachlovic. Pivovar Staropramen může denně dodat 250 a Popovický kozel 350 bas piva, přičemž do Radotína je třeba dovést 150, do Strašnic 240 a do Tachlovic 210 bas piva libovolné značky.

Náklady na přepravu jedné basy (v Kč) jsou uvedeny v následující tabulce:

	Radotín	Strašnice	Tachlovice
Staropramen	20	15	25
Popovický Kozel	25	30	20

Úkolem je sestavit takový plán rozvozu, aby přepravní **náklady** byly **minimální**.

Řešení

x = počet bas dodaných ze Smíchova do Radotína

y = počet bas dodaných ze Smíchova do Strašnic

Plán rozvozu:

	Radotín	Strašnice	Tachlovice	Počet bas celkem
Staropramen	x	y	$250 - x - y$	250
Popovický Kozel	$150 - x$	$240 - y$	$x + y - 40$	350
Celkem dodáno	150	240	210	600

Z tabulky určíme podmínky pro definiční obor produkční funkce $P(x, y)$:

Podle podmínek zadání musí platit:

$250 - x - y \geq 0;\ 150 - x \geq 0$

$x + y - 40 \geq 0;\ 240 - y \geq 0$

A nutně musí být splněno (aby úloha měla smysl): $x \geq 0\ \wedge\ y \geq 0$.

Těchto šest nerovnic po zakreslení do kartézského grafu určuje definiční obor funkce $P(x, y)$, viz graf 3.

Definičním oborem produkční funkce $P(x, y)$ je šestiúhelník $ABCDEF$ s vrcholy:

$A = [0; 40]$; $B = [40; 0]$; $C = [150; 0]$; $D = [150; 100]$; $E = [10; 240]$; $F = [0; 240]$

Produkční funkce $P(x, y)$ je určena cenou za basy piva:

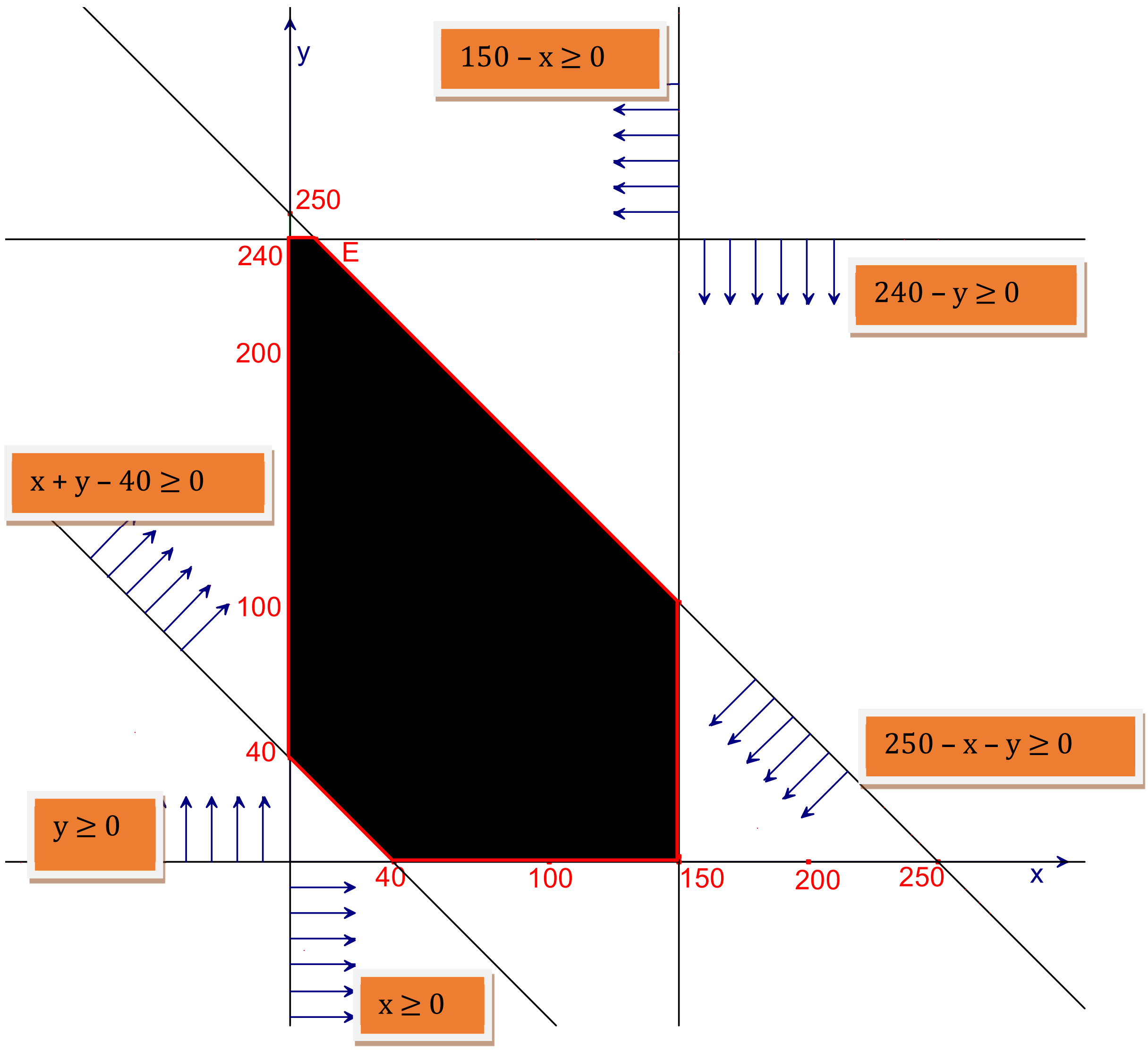
$P(x, y) = 20x + 15y + 25(250 - x - y) + 25(150 - x) + 30(240 - y) + 20(x + y - 40)$

Upravíme-li tento předpis funkce, dostaneme:

$P(x, y) = 20x + 15y + 6\,250 - 25x - 25y + 3\,750 - 25x + 7\,200 - 30y + +20x + 20y - 800 = -10x - 20y + 16\,400.$

Produkční funkce je $P(x, y) = -10x - 20y + 16\,400.$

Produkční funkce $P(x, y)$ je lineární funkce na konvexním mnohoúhelníku (v tomto případě je $\mathcal{D}_f$ žlutý šestiúhelník $ABCDEF$ na grafu č. 3) a má tedy podle předchozí teorie zaručen extrém v některém ze svých vrcholů.



Graf 3

Určíme funkční hodnoty produkční funkce $P(x, y) = -10x - 20y + 16\,400$ ve všech šesti vrcholech a stanovíme její minimální hodnotu:

$P(A) = -10 \cdot 0 - 20 \cdot 40 + 16\,400 = 15\,600$ (Kč)

$P(B) = -10 \cdot 40 - 20 \cdot 0 + 16\,400 = 16\,000$ (Kč)

$P(C) = -10 \cdot 150 - 20 \cdot 0 + 16\,400 = 14\,900$ (Kč)

$P(D) = -10 \cdot 150 - 20 \cdot 100 + 16\,400 = 12\,900$ (Kč)

$P(E) = -10 \cdot 10 - 20 \cdot 240 + 16\,400 = 11\,500$ (Kč) minimum funkce $P(x, y)$

$P(F) = -10 \cdot 0 - 20 \cdot 240 + 16\,400 = 11\,600$ (Kč).

Závěr

Do Radotína rozveze pivovar 10 bas piva Staropramenu a 140 bas Popovického Kozla, do Strašnic pouze 240 bas Staropramenu a do Tachlovic jen 210 bas Popovického Kozla (viz následující tabulka).

	Radotín	Strašnice	Tachlovice	Počet bas celkem
Staropramen	10	240	0	250
Popovický Kozel	140	0	210	350
Celkem dodáno	150	240	210	600

Cvičení 1

Soukromá pekárna Penam peče 2 druhy oblíbených chlebů – Kváskový balvan a Celozrnný bochník. Na výrobu těchto produktů je v pekárně vymezeno **nejméně** 2,5 pracovních hodin (9 000 s) a **nejvýše** 200 kg chlebového těsta, přičemž Kváskový balvan váží v surovém stavu 2 kg a Celozrnný bochník 1 kg.

Výroba Kváskového balvanu trvá 60 s a bochníku 180 s. Cena Kváskového balvanu je 55 Kč a Celozrnného bochníku 25 Kč. Kolik kusů těchto chlebů je třeba upéci, aby měla firma **maximální zisk** nezávisle na odbytu.

	Kváskový balvan	Celozrnný bochník
Počet kusů	x	y
Spotřeba těsta [kg/ks]	2	1
Čas výroby [s/ks]	60	180
Cena výrobku [Kč/ks]	55	25

Výsledek cvičení 1

Funkce produkce $P(x,y)$ závislá na počtu výrobků x,y je definována takto:

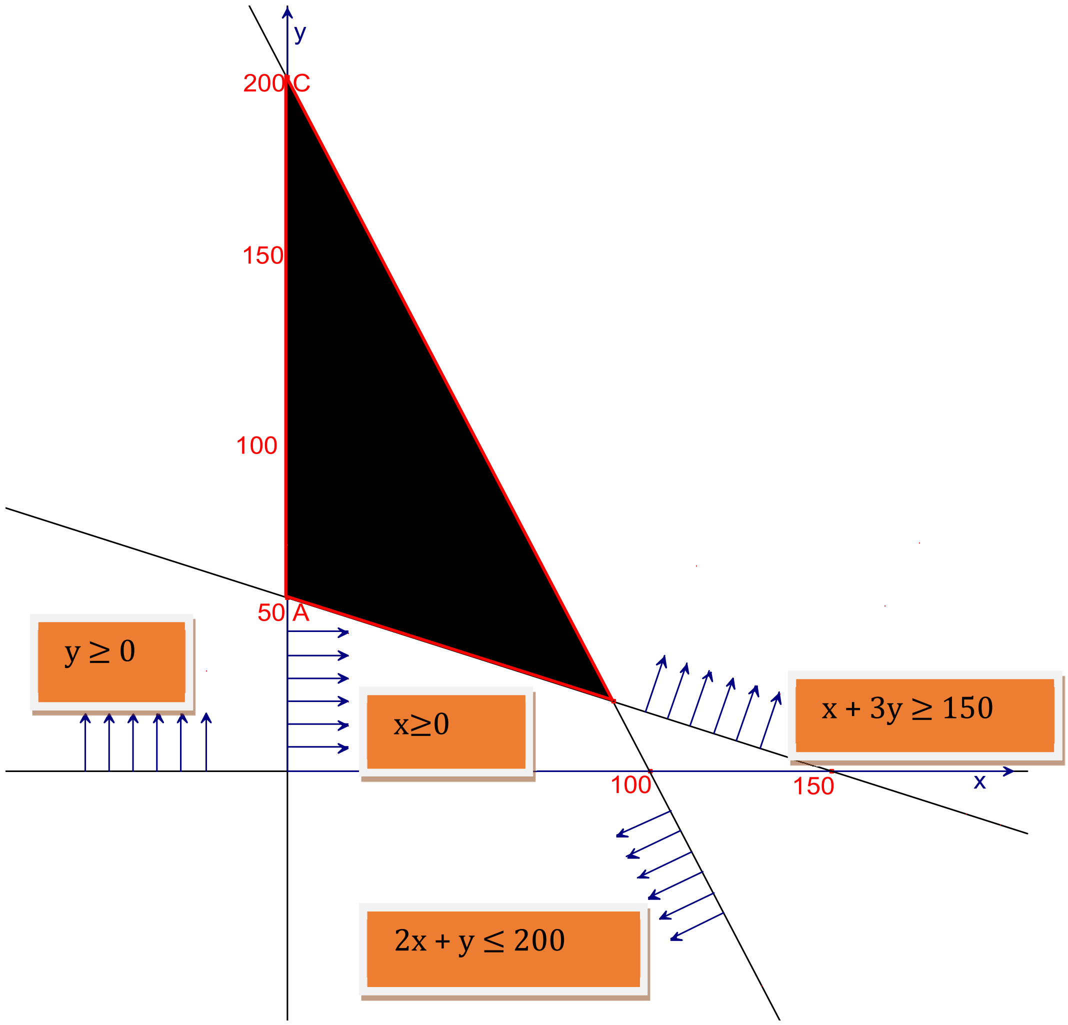
$P(x,y) = 55x + 25y$. Hledáme maximum funkce produkce na definičním oboru $\mathcal{D}_f$, což je trojúhelník ABC zakreslený na grafu 4.

Určíme souřadnice vrcholů $\triangle ABC$: $A = [0;50]$; $B = [90;20]$; $C = [0;200]$ a hodnoty produkční funkce v těchto bodech:

$P(A) = 55 \cdot 0 + 25 \cdot 50 = 1\,250$ (Kč)

$P(B) = 55 \cdot 90 + 25 \cdot 20 = 5\,450$ (Kč) maximumfunkce $P(x,y)$

$P(C) = 55 \cdot 0 + 25 \cdot 200 = 5\,000$ (Kč)



Graf 4

Závěr

Podnik dosáhne maximálního zisku 5 450 Kč při výrobě 90 ks Kváskového balvanu a 20 ks Celozrnného bochníku denně.

Cvičení 2

Mléko se z mlékárenských závodů Madeta České Budějovice a Polná rozváží i do měst R, S a T. Denně se může z Madety Č. Budějovice dodat 300 přepravek s mlékem a z Polné 330 přepravek. Denně je potřeba dodat 150 přepravek do R, 200 přepravek do S a 280 přepravek do T. Náklady na dopravu jedné přepravky (v Kč) z mlékárenských závodů do místa prodeje jsou v následující tabulce. [SL]

	R	S	T
Madeta České Budějovice	4	3	5
Polná	5	6	4

Sestavte takový plán rozvozu (kolik přepravek do měst R, S a T) mléka, aby přepravní **náklady** byly co **nejmenší.**

Tabulka shrnující zadání:

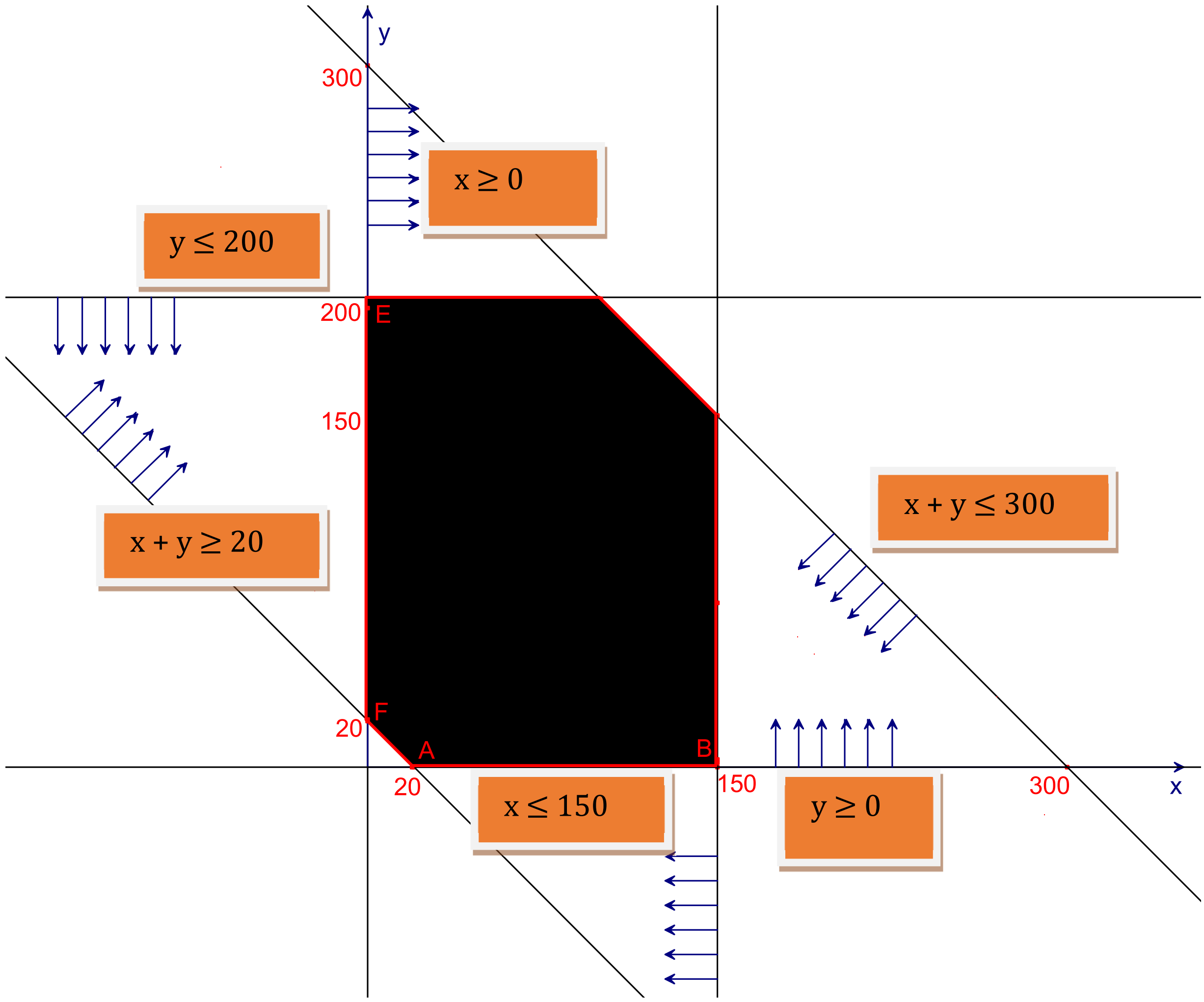
	R	S	T	Počet přepravek celkem
Madeta České Budějovice	x	y	$300 - x - y$	300
Polná				330
Počet přepravek celkem	150	200	280	

Výsledek cvičení 2

Spotřební funkce $P(x, y)$ je určena náklady na dopravu jedné přepravky mléka (v Kč):

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x + 3y + 5(300 - \mathrm{x} - \mathrm{y}) + 5(150 - \mathrm{x}) + 6(200 - \mathrm{y}) + 4(\mathrm{x} + \mathrm{y} - 20) \\ &= -2x - 4y + 3\,370 \end{aligned}$$

Podle předchozí teorie je spotřební funkce $P(x, y)$ lineární funkce na konvexním mnohoúhelníku (v tomto případě je $\mathcal{D}_f$ žlutý šestiúhelník $ABCDEF$ na grafu 5) a má tedy zaručen extrém na jednom z jeho vrcholů.



Graf 5

Definičním oborem spotřební funkce $P(x,y)$ je šestiúhelník $ABCDEF$ s vrcholy:

$$A = [20;0];\ B = [150;0];\ C = [150;150];\ D = [100;200];\ E = [0;200];$$

$F = [0;20]$.

Nyní určíme funkční hodnoty spotřební funkce v těchto bodech a hledáme minimum funkce na $\mathcal{D}_f$:

$P(A) = -2 \cdot 20 - 4 \cdot 0 + 3\,370 = 3\,330$ (Kč)

$P(B) = -2 \cdot 150 - 4 \cdot 0 + 3\,370 = 3\,070$ (Kč)

$P(C) = -2 \cdot 150 - 4 \cdot 150 + 3\,370 = 2\,470$ (Kč)

$P(D) = -2 \cdot 100 - 4 \cdot 200 + 3\,370 = 2\,370$ (Kč) minimum funkce $P(x,y)$

$P(E) = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 200 + 3\,370 = 2\,570$ (Kč)

$P(F) = -2 \cdot 20 - 4 \cdot 20 + 3\,370 = 3\,290$ (Kč)

Závěr

Mlékárny budou mít minimální náklady na rozvoz mléka; pokud Madeta České Budějovice doveze 100 přepravek mléka do města R, 200 přepravek do města S a mlékárna Polná dodá 50 přepravek mléka do města R a 280 do města T.

Plán rozvozu mléka je v následující tabulce:

	R	S	T	Počet přepravek celkem
Madeta České Budějovice	100	200	0	300
Polná	50	0	280	330
Počet přepravek celkem	150	200	280	630

Literatura

[BHN] Batíková; B.; Henzler; J.; Hladíková; H.; Nešverová; E.; Otavová; M.; Sýkorová; I.; Ulrychová; E.; Valentová; E.; *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*; VŠE; Praha; 2009 (vysokoškolská učebnice); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.

[BHV] Batíková; B.; Henzler; J.; Hladíková; H.; Nešverová; E.; Otavová; M.; Sýkorová; I.; Ulrychová; E.; Valentová; E.; *Matematika pro 4 MM 101*; VŠE; Praha; 2006 (skriptum); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.

[BOV] Batíková; B.; Otavová; M.; Valentová; E.; *Matematika v ekonomii*; nakladatelství Oeconomia; Praha; 2011 (skriptum); **ISBN: 80-245-1097-9**.

[OD] Odvárko; O.; *Matematika pro gymnázia – Funkce*; Prometheus; Praha; 2008; **ISBN 978-80-7196-357-8**

[PHC] Pelikán; J.; Henzler; J.; Černý; M.; *Matematické základy informatiky*; VŠE; Praha; 2011.

[SB] Simon; C.; P.; Blume; L.; *Mathematics for Ekonomicts*; W. W. Norton a Co; New York; Mass. – London; 1994.

[SL] Smida; J.; P.; Lukátšová; J.;Šedivý; J.; Vocelka; J.; *Matematika pro I. ročník gymnáziií*; Státní pedagogické nakladatelství n. p. Praha; 1984; č. publikace: 54-00-01/1.

[SO] Soper; J.; *Mathematics for Ekonomics and Business*; Oxford; UK; 2004.