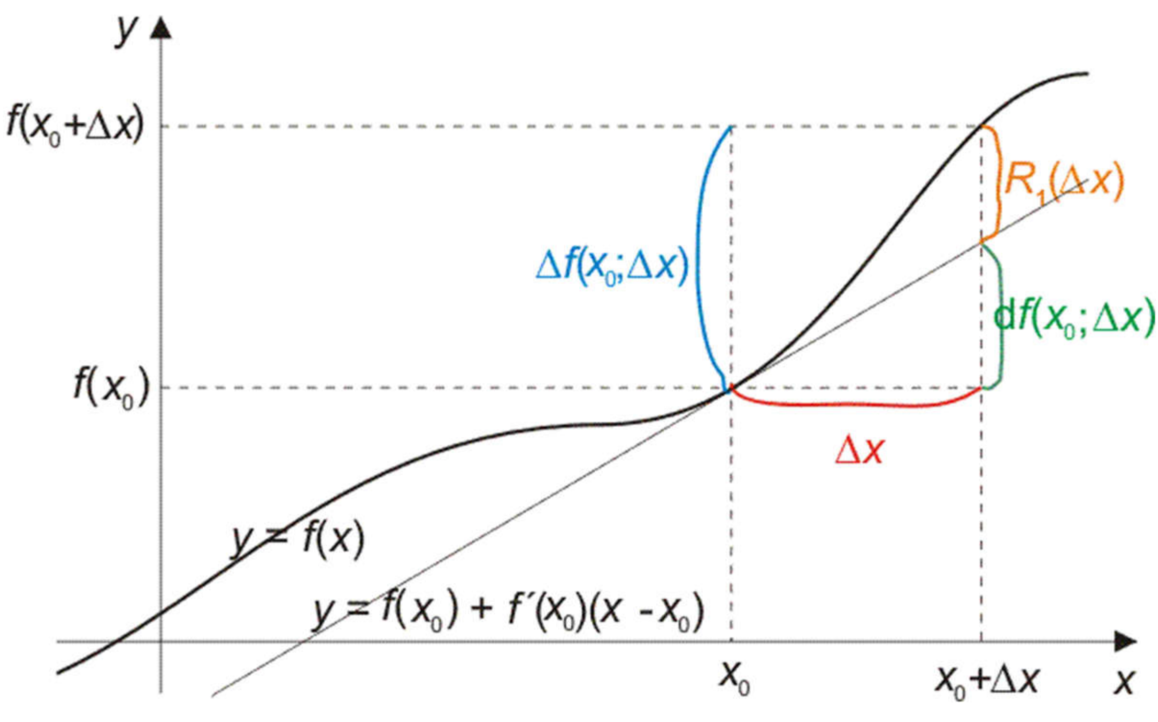
Gymnázium Botičská

Diferenciální počet ve středoškolské matematice



Mgr. Eva Valentová
2018

Předmluva

Tento učební text je určen studentům čtvrtého ročníku čtyřletých gymnázií, kteří se chtějí věnovat při dalším studiu technickým, přírodovědným či ekonomickým předmětům, kde je samozřejmostí znát a umět aplikovat pojem derivace funkce a její využití v těchto oborech. Bez dobré znalosti derivace není možné absolvovat studium na těchto typech vysokých škol. Tato publikace by studentům měla pomoci s porozuměním tohoto pojmu, geometrického významu derivace a v neposlední řadě obsahuje publikace i značné množství neřešených příkladů, na kterých si studenti znalost a výpočet derivace procvičí.

Publikace je členěna na čtyři kapitoly. První definuje pojem derivace pomocí limity funkce a vysvětluje na příkladech, ve druhé kapitole je vysvětlen geometrický význam derivace a souvislost pojmu derivace funkce v bodě a tečny ke grafu funkce v daném bodě. Třetí kapitola je zaměřena na derivace funkcí podle vzorců, je zde velké množství řešených i neřešených příkladů. Ve čtvrté kapitole je vysvětleno využití derivací při výpočtu limit funkcí (L´Hospitalovo pravidlo) s řešenými i neřešenými příklady.

Doufám, že příručka bude studenty oceněna pozitivně a bude jim sloužit jako rozšířený výukový materiál při studiu diferenciálního počtu.

Autorka textu děkuje Ing. Evženu Markalousovi za pomoc s typografií textu a cenné připomínky, které přispěly k jeho zkvalitnění.

Obsah

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1. Derivace

Máme-li funkci f definovanou na nějakém intervalu $\langle a; b\rangle$, pak přírůstek $f(b) - f(a)$ udává změnu hodnoty funkce f v intervalu $\langle a; b\rangle$, průměrný přírůstek $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ udává průměrnou změnu hodnoty funkce odpovídající změně argumentu x o jednu jednotku.

Vezmeme-li vnitřní bod intervalu $c \in (a; b)$ a omezíme se na nějaké okolí bodu c. Bod, který je vpravo od bodu c a je od něho vzdálen h jednotek, lze zapsat jako $c + h$. Bude-li h záporné, bude bod $c + h$ vlevo od bodu c. Průměrný přírůstek v intervalu $\langle c; c + h\rangle$ je roven číslu $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (v intervalu $\langle c + h; c\rangle$ pro h záporné totéž).

Definice derivace

Derivací funkce $f(x)$ v bodě c (značíme $f'(c)$) nazveme limitu zlomku $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ pro h blížící se k nule, neboli

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Vlastní derivace se nazývá derivace, jejíž limita je vlastní (výsledkem je reálné číslo), **nevlastní derivace** je derivace, jejíž limita je nevlastní (výsledkem je ∞ nebo $-\infty$).

Obdobně **derivace zprava** funkce f v bodě c je limita

$$f'_{+}(c) = \lim_{h\to 0_{+}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h},$$

derivace zleva funkce f v bodě c je limita

$$f'_{-}(c) = \lim_{h\to 0_{-}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Derivace spojité funkce je vždy limita neurčitého typu „$\frac{0}{0}$“.

Derivace je limita v jistém reálném bodě c. Existuje tedy, právě když existují obě jednostranné limity, neboli derivace zprava a zleva, a rovnají se ($f'(c) = f'_{+}(c) = f'_{-}(c)$). V dalším výkladu bude vysvětleno, že derivace funkcí lze spočítat jednodušeji podle vzorců, nejprve si ale zkusíme několik příkladů na výpočet derivace funkce v bodě c pomocí definice.

Poznámka: K tomu, aby se dala spočítat derivace funkce jedné reálné proměnné v bodě c, stačí, aby byla funkce v okolí bodu c **definována**, nemusí být spojitá. Příkladem je funkce

$f(x) = sgn\ x$, která není spojitá v bodě $c = 0$ a přesto existuje derivace funkce v tomto bodě, byť nevlastní, tj. $f'(0) = +\infty$.

Příklad 1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $c = 1$.

Řešení

Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = 1$:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2+h) = 2\,.$$

Příklad 2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $c = 0$.

Řešení

Postup bude podobný jako v Příkladu 1. Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Příklad 3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = |x|$ v bodě $c = 0$.

Řešení

Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}. \cdot$$

Podle definice absolutní hodnoty je

- $|h| = h$ pro $h > 0$ (vpravo od bodu $c = 0$),
- $|h| = -h$ pro $h < 0$ (vlevo od bodu $c = 0$).

Budeme tedy počítat limity zprava a zleva, neboli derivaci zprava a zleva:

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0_+} 1 = 1.$$

$$f'_{-}(c) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0_-} -1 = -1.$$

Protože se derivace zprava a zleva nerovnají, derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $c = 0$ neexistuje.

Příklad 4

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $c = 0$.

Řešení

Postup bude podobný jako v Příkladu 1. Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{h}^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0^2}} = \frac{1}{0_+} = \infty \,.$$

Z definice derivace lze odvodit vzorce pro derivování základních elementárních funkcí (mocninných a odmocninných, exponenciálních a logaritmických, goniometrických a cyklometrických, tj. inverzních ke goniometrickým). V příkladu 5 odvodíme derivaci funkce $f(x) = x^2$ v obecném bodě *x*. [BHV]

Příklad 5

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v obecném bodě $c = x$.

Řešení

Postup bude podobný jako v Příkladu 1. Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x \,.$$

Příklad 6

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = e^x$ v obecném bodě $c = x$.

Řešení

Postup bude podobný jako v Příkladu 1. Nejprve dosadíme do vzorce pro derivaci $c = x$:

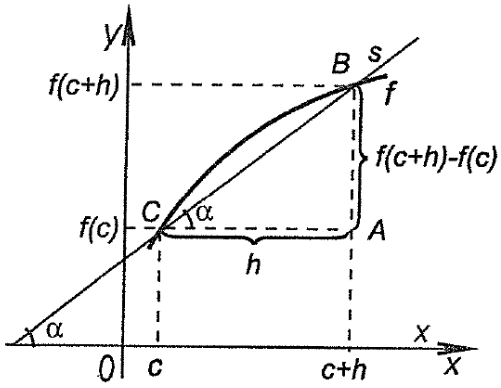
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

(Využili jsme poznatku, že $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$).

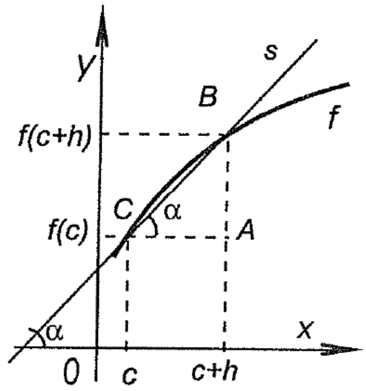
Geometrický význam derivace

Platí: Vlastní derivace spojité funkce v bodě c je rovna směrnici její tečny v tomto bodě c.

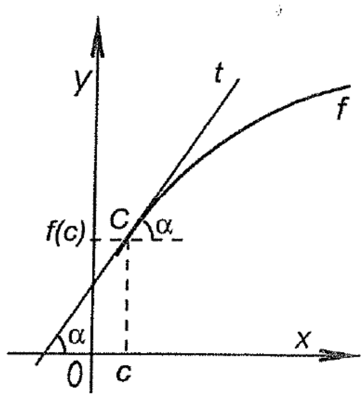
Tento fakt odvodíme pomocí tří obrázků:



Obr. 1



Obr. 2



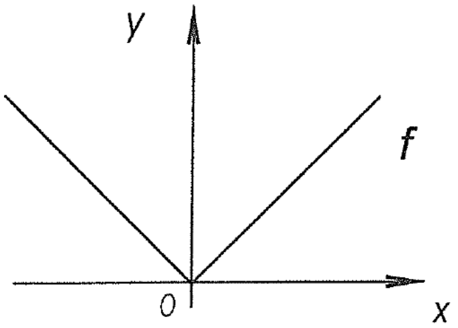
Obr. 3

- Na obr. 1 sledujeme pravoúhlý $\triangle ABC$ (kde $C = [c; f(c)]$, $B = [c + h; f(c + h)]$). Přímka *BC je* sečnou grafu funkce $f(x)$, označme ji s. Ve sledovaném $\triangle ABC$ má svislá odvěsna velikost $f(c + h) - f(c)$, zatímco vodorovná odvěsna má velikost h. Podíl těchto dvou odvěsen $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ je roven $tg\ \alpha$ (protilehlá odvěsna ku přilehlé se odvěsně). Úhel α je na obr. 1 dvakrát. V sledovaném $\triangle ABC$, je to ale také úhel, který svírá sečna s s kladnou poloosou x. Právě tangens α, který svírá sečna s kladnou poloosou x, se nazývá směrnicí přímky. Tedy odvodili jsme, že zlomek $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ je roven směrnici sečny s.

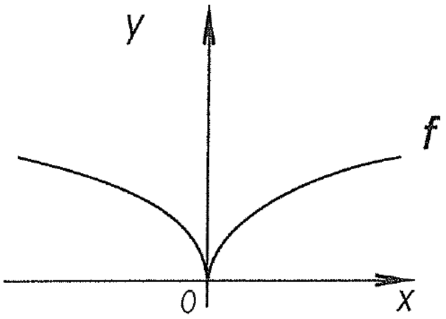
- Na obr. 2 se zmenší velikost h, zmenší se vzdálenost bodů B a C. Graf sečny bude více podobný grafu tečny v bodě c.

- Na obr. 3 je patrné, že když se h limitně blíží k 0, splynou body B a C, sečna přejde v tečnu, kterou označíme t. Nyní je tedy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = tg\ \alpha$. Jelikož je výraz na levé straně rovnice derivace funkce $f(x)$ v bodě c a výraz na pravé straně rovnice směrnicí tečny t, dostáváme, že derivace funkce $f(x)$ v bodě c je rovna směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě c (procházející bodem $C = [c; f(c)]$).

Poznámka: Pro spojité funkce platí: Nemá-li spojitá funkce v nějakém bodě derivaci, znamená to, že graf má v tomto bodě „**hrot**". [BOV]



Obr. 4



Obr. 5

Příkladem je třeba funkce $f(x) = |x|$ v bodě $c = 0$, v příkladu 3. předchozí kapitoly jsme zjistili, že derivace této funkce v bodě $c = 0$ neexistuje, je tam hrot, viz obr. 4. Podobný příklad je také u funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $c = 0$ (derivace zprava v bodě $c = 0$ je ∞, derivace zleva v bodě $c = 0$ je $-\infty$), viz obr. 5.

Rovnice tečny funkce $f(x)$ v bodě c má tvar:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c),$$

existuje-li vlastní derivace funkce $f(x)$ v bodě c. Pokud je derivace nevlastní, tečnou je kolmice na osu x (s rovnicí $x = c$). [BHN]

Příklad 7

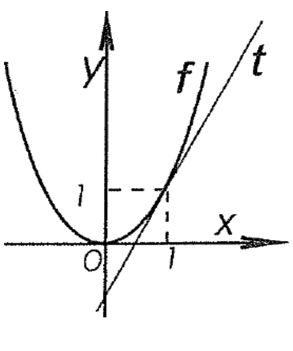
Vypočtěte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $c = 1$.

Řešení

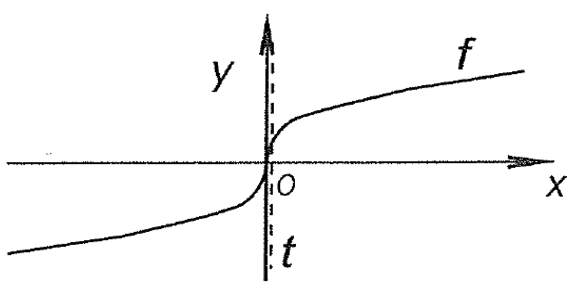
Použijeme výsledek derivace funkce $f(x) = x^2$v bodě $c = 1$ z příkladu 1 z předchozí kapitoly: $f'(1) = 2$. Vypočítáme funkční hodnotu $f(1) = 1^2 = 1$.

Vše dosadíme do rovnice tečny:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$



Obr. 6



Obr. 7

Graf tečny je zobrazen na obr. 6.

Příklad 8

Vypočtěte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $c = 0$.

Řešení

Opět použijeme výsledek derivace funkce $f(x) = x^2$v bodě $c = 0$ z příkladu 2 z předchozí kapitoly: $f'(0) = 0$. Vypočítáme funkční hodnotu $f(0) = 0^2 = 0$.

Vše dosadíme do rovnice tečny:

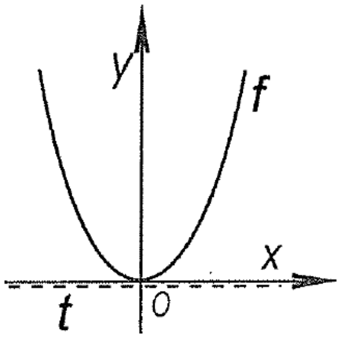
$y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 0$. Můžeme zobecnit, že je-li derivace funkce v bodě c nulová, směrnice tečny je také nulová, což znamená, že tečna nerovnoběžná s osou x. Tečna v tomto příkladu má rovnici t: $y = 0$, jde o osu x, viz obr. 8.

Příklad 9

Vypočtěte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $c = 0$.

Řešení

Opět použijeme výsledek derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $c = 0$ z příkladu 4 z předchozí kapitoly: $f'(0) = \infty$. Vypočítáme funkční hodnotu $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$.



Obr. 8

V tomto případě je tečnou kolmice na osu x, (zde konkrétně osa y, tedy t: $x = 0$), tečna je zobrazena na obr. 7, tečna je zdůrazněna čárkováním.

Derivování podle vzorců

Naším úkolem je naučit se derivovat elementární funkce a poté i složitější složené funkce. Připomeňme, že elementární funkce jsou funkce, které vzniknou z konečně mnoha základních funkcí sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním. Nejprve se tedy naučíme vzorce pro derivování základních funkcí, potom vzorce pro derivování součtu, rozdílu, podílu a složených funkcí.

Tak jako jsme v Příkladu 5 odvodili derivaci funkce $f(x) = x^2$ v obecném bodě $c = x$ a v Příkladu 6 odvodili derivaci funkce $f(x) = e^x$, můžeme stejným způsobem odvodit derivace všech základních funkcí.

Poznámka: Místo zápisu $f'(x) = 2x$ používáme zápis $(x^2)' = 2x$.

Podle vzorců lze derivovat funkce, kdykoli existuje vlastní derivace. Pokud pro nějaký bod nemá vzorec pro derivaci smysl, znamená to, že v něm neexistuje vlastní derivace. Pak musíme pro výpočet derivace použít definici derivace a mohou nastat dva případy, buď derivace existuje, ale je nevlastní ($\pm\infty$). Nebo derivace neexistuje (příkladem je funkce absolutní hodnota v bodě 0, viz Příklad 3 v první kapitole). Derivováním podle vzorců tedy budeme počítat pouze vlastní derivace.

Vzorce (derivace základních funkcí)

Vzorce platí ve všech bodech, pro které mají výrazy smysl, tedy všude, kde existuje vlastní derivace dané funkce:

1. $(k)' = 0 \; pro \; k \in \mathbb{R}$	7. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(x)' = 1$	8. $(\cos x)' = -\sin x$

3. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \; pro \; \alpha \in \mathbb{R}$	9. $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot lna \; pro \; a \in \mathbb{R}^+$	10. $(cotg\ x)' = \frac{-1}{sin^2 x}$
5. $(e^x)' = e^x$	11. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna} \; pro \; [a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1]$	

Derivace cyklometrických funkcí:

12.	$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ pro\ \ x \in (-1; 1)$
13.	$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ pro\ \ x \in (-1; 1)$
14.	$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}\ \ pro\ \ x \in \mathbb{R}$
15.	$(\mathrm{arccotg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}\ \ pro\ \ x \in \mathbb{R}$

Příklad 10

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^2$.

Řešení

Použijeme vzorec 3., kde $\alpha = 2$. Tedy $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$. Výsledek platí pro $x \in \mathbb{R}$. Ke stejnému výsledku jsme dospěli pomocí definice, viz Příklad 5.

Příklad 11

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x}$.

Řešení

Protože lze funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ převést $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Použijeme vzorec 3., kde $\alpha = -1$. Tedy $(x^{-1})' =$ $= (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. Výsledek platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 12

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$.

Řešení

Protože lze funkci $f(x) = \sqrt{x}$ převést $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Použijeme vzorec 3., kde $\alpha = \frac{1}{2}$. Tedy $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$ $\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Výsledek platí pro $x \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 13

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Řešení

Protože lze funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ převést $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Použijeme vzorec 3., kde $\alpha = \frac{1}{3}$. Tedy $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Výsledek platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pro $x = 0$ musíme derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pomocí definice, viz Příklad 4.

Derivace aritmetických operací

Pro reálné funkce $f(x), g(x), k \in \mathbb{R}$:

1. $(k \cdot f)' = k \cdot f'$	3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$	4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g + f \cdot g'}{g^2}$; $g \neq 0$.

Příklad 14

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 3cosx$.

Řešení

Podle vzorce 1. derivujeme reálný násobek funkce $cosx$ a dostaneme: $(3cosx)' = 3(cosx)' = 3 \cdot (-sinx) = -3sinx$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 15

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + cotgx - ln2$.

Řešení

Podle vzorce 1.a 2. derivujeme $\left(\frac{1}{3}x^3 + cotgx - ln2\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{sin^2x} - 0 == x^2 - \frac{1}{sin^2x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Poznámka: Je rozdíl, jestli derivujeme konstantu, která stojí ve funkčním předpisu jako sčítanec (Příklad 15 - $ln2$) a jako činitel v součinu (Příklad 14 – 3 $\cdot$ $cosx$).

Příklad 16

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^5 e^x$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součin dvou funkcí – mocninné (podle vzorce 3.) a exponenciální (podle vzorce 5.) a dostaneme:

$(x^5 e^x)' = (x^5)' e^x + x^5 (e^x)' = 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x (5 + x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 17

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{5} x^5 - 7x^2 + 4x - 6$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součet funkcí (mocninné a konstanty) a dostaneme:

$\left(\frac{1}{5} x^5 - 7x^2 + 4x - 6\right)' = \frac{1}{5} 5x^4 - 7 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 = x^4 - 14x + 4$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 18

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 5x^2 cosx + 7$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součin dvou funkcí – mocninné (podle vzorce 3.) a goniometrické (podle vzorce 8.) a dostaneme:

$(5x^2 cosx + 7)' = (5x^2)' cosx + 5x^2 (cosx)' + (7)' = 5 \cdot 2x \cdot cosx + 5x^2(-sinx) + 0 =$

$= 10x\ cosx - 5x^2 sinx$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 19

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = tgx + \frac{1}{x} + x \cdot lnx$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součet tří funkcí (třetí je součinem lineární funkce a přirozeného logaritmu) a dostaneme:

$\left(tgx + \frac{1}{x} + x \cdot lnx\right)' = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{x^2} + 1 \cdot lnx + x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{x^2} + lnx + 1$ pro

$x \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 20

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^3} + 5^x$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součet a rozdíl funkcí mocninných a obecné exponenciály a dostaneme:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 5^x\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' + (5^x)' = 2x — (-3x^{-4}) + 5^x ln5 =$$

$= 2x + \frac{3}{x^4} + 5^x ln5$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 21

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{lnx}{x}$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro podíl funkcí přirozený logaritmus a lineární funkce a dostaneme:

$\left(\frac{lnx}{x}\right)' = \frac{(lnx)' \cdot x - lnx \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - lnx \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 22

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = xe^x \cdot sinx$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro součin tří funkcí (nejprve součin xe^x a $sinx$.) a poté první funkci opět pomocí pravidla pro součin funkcí (lineární a exponenciály) dostaneme pro $x \in \mathbb{R}$:

$(xe^x \cdot sinx)' = (xe^x)' \cdot sinx + xe^x \cdot (sinx)' = [(x)'e^x + x(e^x)'] \cdot sinx + xe^x \cdot cosx =$

$= [1 \cdot e^x + x \cdot e^x] \cdot sinx + xe^x \cdot cosx = (1 + x)e^x sinx + xe^x \cdot cosx$.

Příklad 23

Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{sinx \cdot lnx}{x} - \cos x$.

Řešení

Derivujeme postupně podle vzorce pro rozdíl funkcí, pak podílu funkcí a v čitateli podílu je nakonec součin funkcí sinus a přirozený logaritmus a dostaneme pro $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(\frac{sinx \cdot lnx}{x} - \cos x\right)' = \left[\frac{(sinx \cdot lnx)'}{x}\right]' - (\cos x)' = \frac{(sinx \cdot lnx)' \cdot x - sinx \cdot lnx \cdot (x)'}{x^2} + sinx =$$

$$= \frac{\left(cosx \cdot lnx \cdot x + sinx \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x - sinx \cdot lnx \cdot 1}{x^2} + sinx = \frac{x \cdot cosx \cdot lnx \cdot x + sinx - sinx \cdot lnx}{x^2} + sinx \ .$$

Derivace složené funkce

Derivace složené funkce probíhá pro všechna přípustná x podle následujícího vzorce:

$[f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x)$, kde po derivování dosadíme $y = g(x)$.

Příklad 24

Derivujte funkci $f(x) = ln(sinx)$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro derivaci složené funkce, vnitřní funkcí je funkce sinus, vnější funkce je logaritmus. Obě jsou základní funkce, které derivujeme podle vzorců (vnější funkci s proměnnou y): $(lny)' = \frac{1}{y}$; $(sinx)' = cosx$. Podle vzorce pro složenou funkci dostaneme (po dosazení vnitřní funkce $y = sinx$)

pro $sinx > 0, tj. x \in (2k\pi;\ \pi + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \frac{1}{y} \cdot cosx = \frac{1}{sinx} \cdot cosx = \frac{cosx}{sinx} = cotg\ x\ .$$

Příklad 25

Derivujte funkci $f(x) = cos(x^3)$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro derivaci složené funkce, vnitřní funkcí je funkce třetí mocnina, vnější funkcí je kosinus. Obě jsou základní funkce, které derivujeme podle vzorců (vnější funkci s proměnnou y): $(cosy)' = -siny$; $(x^3)' = 3x^2$. Podle vzorce pro složenou funkci dostaneme (po dosazení vnitřní funkce $y = x^3$) pro $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = -sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 sin(x^3)$.

Příklad 26

Derivujte funkci $f(x) = sin^4(x)$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro derivaci složené funkce, připomeňte, že $sin^4(x) = (sinx)^4$ vnitřní funkcí je funkce sinus, vnější funkcí je funkce čtvrtá mocnina. Obě jsou základní funkce, které derivujeme podle vzorců (vnější funkci s proměnnou y): $(y^4)' = 4y^3$; $(sinx)' = \cos x$. Podle vzorce pro složenou funkci dostaneme (po dosazení vnitřní funkce $y = sinx$) pro $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 4(\sin x)^3 \cdot cosx = 4sin^3x\, cosx$.

Příklad 27

Zderivujte funkci $f(x) = 2^{cos5x}$.

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro derivaci složené funkce, jde o složení tří funkcí. Vnější funkce je exponenciální $y = 2^x$, vnitřní funkce $cos5x$ je složená z vnější funkce $cosy$ a vnitřní funkce $5x$ (dosadíme $y = 5x$) pro $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = (2^{cos5x})' = 2^{cos5x} \cdot ln2 \cdot (-sin5x) \cdot 5 = -5ln2 \cdot sin5x \cdot 2^{cos5x}$.

Příklad 28

Derivujte funkci $f(x) = e^{x+3tgx}$

Řešení

Derivujeme podle vzorce pro derivaci složené funkce, vnější funkce je exponenciální e^y a vnitřní funkce je součet v exponentu (součet lineární funkce a funkce tgx), dostaneme pro $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = (e^{x+3tgx})' = (e^y)' = e^y \cdot y' = e^{x+3tgx}\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{cos^2x}\right) =$$

$$= e^{x+3tgx}\left(1 + \frac{3}{cos^2x}\right).$$

Cvičení

A. Derivujte podle vzorců funkce $f(x)$ (v bodech, kde derivace funkce existuje):

1. $f(x) = x^3 lnx + e^2$
2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 7x - 3\log_5 x$
3. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + ln4$
4. $f(x) = cotgx - \frac{2}{x^7} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)$
6. $f(x) = tg2x$
7. $f(x) = x^3 \cdot cotgx$
8. $f(x) = xe^x + x^3 2^x$
9. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
10. $f(x) = \frac{1}{sinx}$
11. $f(x) = (x^2 + 7x + 5)^{10}$
12. $f(x) = 5^{sinx}$
13. $f(x) = e^{\sqrt{x}-1}$
14. $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$
15. $f(x) = \frac{x+3}{e^{x^2}}$
16. $f(x) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^3}{2}\right) sin2x$
17. $f(x) = ln(cosx) - 2tg^2 x$

B. Derivujte funkce $f(x)$ v jejich definičním oboru (podle vzorců):

1. $f(x) = \sqrt[3]{x-4} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$
2. $f(x) = ln(x^2 + 1)$

3. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^4}$

4. $f(x) = 7x^4 lnx$

5. $f(x) = \frac{x}{lnx}$

6. $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

7. $f(x) = \sqrt[3]{3sinx - 8}$

8. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

9. $f(x) = \frac{sinx}{1-cosx}$

10. $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2}$

11. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

12. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

13. $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$

14. $f(x) = \frac{logx}{x^2}$

15. $f(x) = \frac{x^5-2x}{x^2}$

16. $f(x) = \frac{sinx}{cos^2x}$

17. $f(x) = cotgx - \frac{cosx}{e^x}$

18. $f(x) = (sinx + x^6)^4$

19. $f(x) = 5\sin(2x - 4)$

20. $f(x) = ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$

21. $f(x) = (tgx)^3$

22. $f(x) = e^{\sqrt{x}-3}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (x + 1)$

C. Vypočtěte derivaci funkce $f(x)$ v příslušném bodě (podle vzorců):

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - lnx$ v bodě $c = 1$
2. $f(x) = x \cdot lnx$ v bodě $c = 1$
3. $f(x) = \frac{4-3x}{2+3x}$ v bodě $c = \frac{1}{3}$
4. $f(x) = 2sin\frac{x}{2}$ v bodě $c = \frac{\pi}{2}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ v bodě $c = 3\sqrt{2}$
6. $f(x) = \frac{4sinx}{1+cosx}$ v bodě $c = \frac{\pi}{2}$
7. $f(x) = -4ln(cosx)$ v bodě $c = \frac{\pi}{3}$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(4x + 8)$ v bodě $c = 2$
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$ v bodě $c = 9$
10. $f(x) = tg2x$ v bodě $c = \frac{\pi}{8}$
11. $f(x) = e^{\sqrt{x}-1}$ v bodě $c = 9$
12. $f(x) = ln(x^2 + 1)$ v bodě $c = 1$
13. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ v bodě $c = 1$

Výsledky

A. Všechny funkce jsou derivovány tam, kde jsou definovány, definiční obory ve výsledcích nejsou uvedeny:

1. $f'(x) = 3x^2 lnx + \frac{x^3}{x} = 3x^2 lnx + x^2$

2. $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{xln5} = x^3 + 7 - \frac{3}{xln5}$

3. $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

4. $f'(x) = -\frac{1}{sin^2 x} + \frac{14}{x^8} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

5. $f'(x) = \frac{cosx \cdot cosx + sinx \cdot sinx}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$

6. $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{cos^2 2x} = \frac{2}{cos^2 2x}$

7. $f'(x) = 3x^2 \cdot cotgx + x^3 \left(-\frac{1}{sin^2 x}\right) = 3x^2 \cdot cotgx - \frac{x^3}{sin^2 x} = \frac{x^2(3sinxcosx - x)}{sin^2 x}$

8. $f'(x) = e^x + xe^x + 3x^2 2^x + x^3 2^x ln2 = e^x(1 + x) + x^2 2^x (3 + x \cdot ln2)$

9. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

10. $f'(x) = -\frac{cosx}{sin^2 x}$

11. $f'(x) = 10 \cdot (x^2 + 7x + 5)^9 \cdot (2x + 7) = (20x + 70)(x^2 + 7x + 5)^9$

12. $f'(x) = 5^{sinx} \cdot ln5 \cdot cosx$

13. $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{2\sqrt{x}}$

14. $f'(x) = \frac{4-x}{\sqrt{8x - x^2}}$

15. $f'(x) = \frac{e^{x^2} - (x+3) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{e^{x^2}(1 - 2x^2 - 6x)}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{(1 - 6x - 2x^2)}{e^{x^2}}$

16. $f'(x) = \left(\frac{3}{4} - \frac{3x^2}{2}\right) sin2x + \left(\frac{3x}{2} - x^3\right) cos2x$

17. $f'(x) = \frac{1}{cosx} \cdot (-sinx) - 2 \cdot 2tgx \cdot \frac{1}{cos^2 x} = -tgx - 4\frac{tgx}{cos^2 x}$

B.

1. $f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-4)^2}}$

2. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

3. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^5}$

4. $f'(x) = 7x^3(4\cdot lnx + 1)$

5. $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2} = \frac{lnx-1}{ln^2x}$

6. $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$

7. $f'(x) = \frac{1}{3}(3sinx - 8)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3cosx) = \frac{cosx}{\sqrt[3]{(3sinx-8)^2}}$

8. $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

9. $f'(x) = \frac{cosx\cdot(1-cosx)-sinx\cdot sinx}{(1-cosx)^2} = \frac{cosx-1}{(1-cosx)^2} = -\frac{(1-cosx)}{(1-cosx)^2} = \frac{1}{cosx-1}$

10. $f'(x) = \frac{(3x^2-1)x^2-(x^3-x+2)2x}{x^4} = \frac{x^4+x^2-4x}{x^4}$

11. $f'(x) = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^5}}$

12. $f'(x) = \frac{e^x(2x-x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x-x^2}{e^x}$

13. $f'(x) = \frac{x(1-2lnx)}{x^4} = \frac{1-2lnx}{x^3}$

14. $f'(x) = \frac{\frac{1}{ln10}-2logx}{x^3}$

15. $f'(x) = \frac{(5x^4-2)x^2-(x^5-2x)2x}{x^4} = \frac{3x^4+2}{x^2}$ nebo $f'(x) = \left(\frac{x^5}{x^2} - \frac{2x}{x^2}\right)' = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$

16. $f'(x) = \frac{cos^2x+2sin^2x}{cos^3x}$

17. $f'(x) = -\frac{1}{sin^2x} + \frac{sinx+cosx}{e^x}$

18. $f'(x) = 4\cdot(sinx + x^6)^3\cdot(cosx + 6x^5)$

19. $f'(x) = 10 \cdot cos(2x-4)$

20. $f'(x) = \frac{x+1}{2-x} \cdot \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(2-x)(x+1)}$

21. $f'(x) = \frac{3sin^2x}{cos^4x}$

22. $f'(x) = e^{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

23. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+1) + \sqrt[3]{x}$

C.

1. $f'(x) = 4x^3 + 6x - \frac{1}{x}$; $f'(1) = 9$

2. $f'(x) = lnx + x \cdot \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1$

3. $f'(x) = \frac{-18}{(2+3x)^2}$; $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2$

4. $f'(x) = \cos\frac{x}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$; $f'(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

6. $f'(x) = \frac{4(\cos x+1)}{(1+\cos x)^2} = \frac{4}{1+cosx}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

7. $f'(x) = 4\,\mathrm{tg}\,x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}$

8. $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} + 4\right)$; $f'(2) = 0$

9. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+3\right)^2}$; $f'(9) = \frac{1}{162}$

10. $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{(\cos 2x)^2} = \frac{2}{cos^2 2x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

11. $f'(x) = e^{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$; $f'(9) = \frac{e^2}{6}$

12. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; $f'(1) = 1$

13. $f'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$; $f'(1) = \frac{1}{e}$

2. Použití derivací při výpočtu limit funkcí

Následující pravidlo pro počítání limit se týká pouze neurčitých limitních typů „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$". Použijeme-li jej pro limitu jiného typu, pravděpodobně dostaneme zcela nesprávný výsledek.

Věta: L´Hospitalovo pravidlo

Je-li limita $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", limita $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita na pravé straně existuje (pro $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Stručně řečeno limita podílu, která je neurčitého limitního typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", se vypočítá jako **limita podílu derivací čitatele a jmenovatele**

L´Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.

Příklad 1

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{2x}$

Řešení

Jelikož dosazením $x = 0$ zjistím, že limita je typu „$\frac{0}{0}$", můžeme použít L´Hospitalovo pravidlo. Zderivujeme zvlášť čitatele a jmenovatele a pak dosadíme opět $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(sinx)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{2} = \frac{cos0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Někdy použitím L´Hospitalova pravidla získáme opět neurčitý typ „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$". Pak použijeme pravidlo **opakovaně vícekrát**, až dojdeme ke konkrétnímu výpočtu limity.

Příklad 2

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$

Řešení

Jelikož dosazením $x = \infty$ zjistím, že limita je typu „$\frac{\infty}{\infty}$", můžeme použít L´Hospitalovo pravidlo. Derivujeme zvlášť čitatele a jmenovate a pak dosadíme opět $x = \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \cdot ln2}$$

zjistíme, že limita je typu „$\frac{\infty}{\infty}$“. Použijeme L´Hospitalovo pravidlo ještě jednou:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \cdot ln2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(2^x \cdot ln2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x \cdot ln2 \cdot ln2}$$

a po dosazení $x = \infty$ dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x \cdot ln2 \cdot ln2} = \frac{2}{2^\infty \cdot ln2 \cdot ln2} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Pozn.: L´Hospitalovo pravidlo můžeme po úpravě použít i na jiné neurčité limitní typy, např. „$\infty - \infty$ “ nebo „$0 \cdot (\pm\infty)$ “.

Typ „$\infty - \infty$ “

V těchto příkladech jde o limitu rozdílu $A - B$, kde $\lim A = \infty$ a $\lim B = \infty$. Ve většině těchto příkladů stačí vytknutím jednoho z výrazů A, B převést rozdíl limit na součin a poté dostaneme podílový typ, který dopočteme L´Hospitalovým pravidlem, tj. $\lim(A - B) = \lim A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = \infty(1 - L)$, kde limitu $\lim \frac{B}{A} = L$ vypočítáme L´Hospitalovým pravidlem.

Příklad 3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}(x - lnx)$.

Řešení

Vytkneme x: $\lim\limits_{x\to\infty}(x - lnx) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{x}\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)$.

L´Hospitalovým pravidlem spočítáme limitu podílu v závorce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} = 0\ .$$

Dosadíme do původní limity: $\lim\limits_{x\to\infty}(x - lnx) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{x}\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty$.

Typ „$0 \cdot (\pm\infty)$ “

V těchto příkladech jde o součin $A \cdot B$, kde $\lim A = 0$ a $\lim B = \pm\infty$. Tento součin lze jednoduše převést na podíl, a to buď $A \cdot B = \frac{A}{B^{-1}}$, což je výraz, jehož limita je typu „$\frac{0}{0}$ “, nebo $A \cdot B = \frac{B}{A^{-1}}$ limitního typu „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “. V obou případech jde o výraz vhodný pro použití L´Hospitalova pravidla (a aspoň jeden z nich půjde spočítat).

Příklad 4

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 0_+} x \cdot lnx$.

Řešení

Jde o typ „$0 \cdot (\pm\infty)$ “, výraz převedeme na podíl a L´Hospitalovým pravidlem vypočítáme:

$$\lim_{x \to 0_+} x \cdot lnx = \lim_{x \to 0_+} \frac{lnx}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{(lnx\,)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0_+} (-x) = 0\,.$$

Cvičení

Vypočtěte limity funkcí:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{tgx}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x^2+x}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+cosx}}{sinx}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(2x^2-1)}{3x^2-2x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{20}-20x+19}{x^{40}-40x+39}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-5x-1}{sin^2x}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+5}{x^4+x^2-x}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+3}{e^x}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3^x+1}{x^3+5}$
12. $\lim\limits_{x\to 0_+} x \cdot ln(sinx)$
13. $\lim\limits_{x\to \infty} (x - e^x)$
14. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2 - 2^x)$
15. $\lim\limits_{x\to 0_+} (lnx + cotgx)$
16. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^3 - ln2x)$
17. $\lim\limits_{x\to \infty} (e^{3x} - ln4x)$
18. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x} \cdot ln2x$
19. $\lim\limits_{x\to -\infty} x \cdot e^{x^3}$
20. $\lim\limits_{x\to 0_+} x^3 \cdot lnx$
21. $\lim\limits_{x\to 0_+} x \cdot cotgx$
22. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+2x}{e^x+3}$

Výsledky

1. 1	2. 1	3. $\frac{1}{2}$	4. 0	5. 0	6. 1	7. $\frac{19}{78}$	8. $\frac{25}{2}$
9. 0	10. 0	11. ∞	12. 0	13 $-\infty$	14. $-\infty$	15. ∞	16. ∞
17. ∞	18. 0	19. 0	20. 0	21. 1	22. 0	opakovat třikrát L´Hospitalovo pravidlo	

Literatura

[BHN] Batíková, B., Henzler, J., Hladíková, H., Nešverová, E., Otavová, M., Sýkorová, I., Ulrychová, E., Valentová, E., *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*, VŠE, Praha, 2009 (vysokoškolská učebnice); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.

[BHV] Batíková, B., Henzler, J., Hladíková, H., Nešverová, E., Otavová, M., Sýkorová, I., Ulrychová, E., Valentová, E., *Matematika pro 4 MM 101*, VŠE, Praha, 2006 (skriptum); **ISBN: 978-80-245-1539-7**.

[BOV] Batíková, B., Otavová, M., Valentová, E., *Matematika v ekonomii*, nakladatelství Oeconomia, Praha, 2011 (skriptum); **ISBN: 80-245-1097-9**.